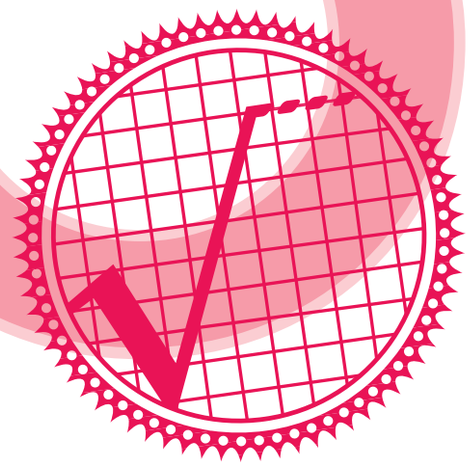
Jukka Kangasaho ◦ Jukka Mäkinen ◦ Juha Oikkonen ◦
Johannes Paasonen ◦ Maija Salmela ◦ Jorma Tahvanainen

# Pitkä matematiikka 8

## Juuri- ja logaritmifunktiot



Sanoma Pro Oy
Helsinki

**Tiedustelut**
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
Pitkä matematiikka 8 Juuri- ja logaritmifunktiot ISBN 978-952-63-2305-3

6 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2393-0
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2394-7

Toimitus: Jussi Laitila, Ville Sipiläinen
Ulkoasu: graafinen suunnittelu Veera Alanko, kansi Timo Jokivartio
Taitto: Jukka Nieminen
Piirrokset: Picman Oy, Pekka Könönen ja Tuomas Könönen

© Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen,
Maija Salmela, Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

**Kopiointiehdot**

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka
on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

# Lukijalle

**Pitkä matematiikka**

Useimmat luonnontieteiden ja tekniikan saavutukset perustuvat matematiikan tuloksiin, niin myös yhä enemmän monet yhteiskuntatieteiden ja humanististen tieteiden oivallukset. Pelkän teoreettisen uteliaisuudenkin innoittamana löydetty matemaattinen tieto on usein osoittautunut yllättävän hyödylliseksi. Matematiikassa yhdistyy kiehtovalla tavalla kaksi piirrettä: se on luovan ajattelun ja oivaltamisen leikkiä ja samalla täsmällistä ja loogista.

Pitkä matematiikka -sarjan tavoitteena on, että opiskelija matematiikan tietojen ja taitojen lisäksi oppii ymmärtämään matematiikan erityisluonteen tiedonalana, jossa teoreettinen kohtaa käytännöllisen ja jossa luova oivaltaminen kohtaa täsmällisen loogisuuden.

**Eteneminen**

Luvun avaa aihepiiriin johdatteleva ongelma tai esimerkki. Uusi teoreettinen tieto kootaan ja perustellaan, ja lisäesimerkit opastavat tiedon hyväksikäyttöön ja syventämiseen. Esimerkit on laadittu niin, että opiskelijat voivat omaksua ne itsenäisesti. Siten tuntityöskentelyssä voidaan usein jo aikaisessa vaiheessa siirtyä itsenäiseen harjoitteluun, jolloin opiskelijat etenevät omassa tahdissaan kirjan esimerkkejä hyödyntäen. Näin menetellen kaikki opiskelijat harjaantuvat perustaidoissa, ja samalla nopeammin etenevillä on mahdollisuus tietojen ja taitojen syventämiseen. Kun opiskelijat ohjataan hyödyntämään kirjan esimerkkejä ja teoriaosuuksia, tarve vihkomuistiinpanojen tekemiseen vähenee ja opiskelijat voivat paremmin keskittyä opetukseen.

**Harjoittelu**

Lukujen harjoitukset ovat kahtena sarjana.

Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka harjoittavat uusia menetelmiä, tukevat teoreettisen tiedon ymmärtämistä ja juurruttamista sekä ohjaavat opitun soveltamiseen. Enimmäkseen tehtävät heijastelevat luvun esimerkkien tilanteita. Sarjaa I voidaan käyttää esimerkiksi oppitunnin aikana tapahtuvaan harjoitteluun.

Sarja II sisältää perustehtävien lisäksi vaativampia tehtäviä, joissa usein on myös matematiikan harrastamiseen innostavaa syventävää tietoa. Sarjasta II voidaan valikoida oppitunnin mittaan havaittujen tarpeiden mukaiset helpommat ja vaativammat kotitehtävät.

Kirjan esimerkit ja teoriaosuudet ovat apuna myös kotitehtävien parissa työskenneltäessä. Kaikkia tarpeellisina pidettyjä tietoja tai sovellustilanteita ei siis tarvitse käsitellä oppitunnin aikana, vaan niihin voidaan perehtyä ratkaistaessa kotitehtäviä kirjan esimerkkien avulla.

**Kertaaminen**

Opiskelijat voivat kerrata koko kurssin kertausluvun avulla. Luvussa käydään ensin läpi kurssin koko sisältö esimerkeillä havainnollistettuna. Sen jälkeen on samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä riittävän osaamisen takaavia perustehtäviä. Kertausluvun päättävissä tehtäväsarjoissa on vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta. Kertausluvun tehtävien vastauksissa on, kuten monien tehtävien vastauksissa kautta koko kurssin, ratkaisemista tukevia ohjeita.

**Opettajan materiaali**

Kirjan opettajan materiaali on Sanoma Pro Oppimisympäristössä. Materiaalissa muun muassa pohditaan opetusmenetelmiä ja selvennetään kirjan ja sen eri lukujen tavoitteita ja niiden ilmenemistä esimerkeissä ja tehtävissä. Lisäksi materiaali tarjoaa työskentelyn avuksi kalvopohjia ja testejä. Opettajan materiaali sisältää myös kaikkien tehtävien yksityiskohtaiset ratkaisut.

**Juuri- ja logaritmifunktiot**

Kurssin aluksi tutkitaan juurifunktioita yhtälöiden ja derivaatan avulla. Sen jälkeen opitaan monin tavoin tärkeä logaritmin käsite, jota käytetään hyväksi muun muassa eksponenttifunktion tutkimisessa. Edelleen löydetään eräs matematiikan tärkeimmistä luvuista, Neperin luku $e$, jonka ominaisuuksiin perustuu eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivoiminen.

Toivotamme mielenkiintoisia ja tuloksellisia työskentelyhetkiä.

Helsingissä 12.10.2006

Tekijät

# Ajankäyttöehdotus

Tässä ajankäyttöehdotuksessa kurssin opiskeluun käytetään 28 oppituntia.

| Luku | Tuntimäärä |
|---|---|
| Funktion derivaatta | 1 |
| Juurifunktiot ja juuriyhtälöt | 2 |
| Juurifunktioiden derivaatta | 2 |
| Funktion $\sqrt[n]{f}$ derivaatta | 2 |
| Juurifunktioiden sovelluksia | 4 |
| Logaritmi | 2 |
| Logaritmikaavat | 2 |
| Logaritmin sovelluksia | 2 |
| Neperin luku $e$ ja luonnollinen logaritmi | 2 |
| Yhdistetty funktio | 2 |
| Eksponenttifunktiot | 2 |
| Logaritmifunktion derivaatta | 2 |
| Käänteisfunktio | 3 |

# Sisällys


Funktion derivaatta . . . . . 7
Juurifunktiot ja juuriyhtälöt . . . . . 14
Juurifunktioiden derivaatta . . . . . 24
Funktion $\sqrt[n]{f}$ derivaatta . . . . . 37
Juurifunktioiden sovelluksia . . . . . 46
Logaritmi . . . . . 61
Logaritmikaavat . . . . . 74
Logaritmin sovelluksia . . . . . 80
Neperin luku $e$ ja luonnollinen logaritmi . . . . . 88
Yhdistetty funktio . . . . . 98
Eksponenttifunktiot . . . . . 108
Logaritmifunktion derivaatta . . . . . 116
Käänteisfunktio . . . . . 125

Kertaus . . . . . 139
Kertaustehtäviä . . . . . 154
Tehtäväsarjoja . . . . . 158
Tehtävien vastaukset . . . . . 161
Hakemisto . . . . . 195

# Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 (ote)

## Matematiikan pitkä oppimäärä

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

### *Opetuksen tavoitteet*

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija
- tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa
- rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

## 8. Juuri- ja logaritmifunktiot (MAA8)

### *Tavoitteet*

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
- tuntee juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden ominaisuudet ja osaa ratkaista niihin liittyviä yhtälöitä
- tutkii juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioita derivaatan avulla
- oppii yhdistetyn funktion derivoimisen
- tutkii aidosti monotonisten funktioiden käänteisfunktioita.

### *Keskeiset sisällöt*

- juurifunktiot ja -yhtälöt
- eksponenttifunktiot ja -yhtälöt
- logaritmifunktiot ja -yhtälöt
- yhdistetyn funktion derivaatta
- käänteisfunktio
- juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaatat

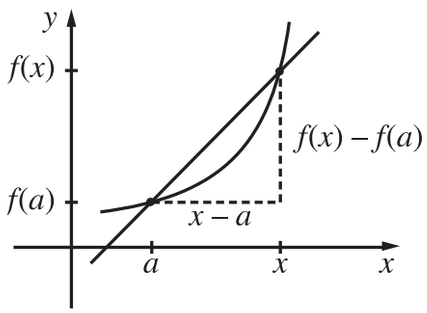
# Funktion derivaatta

Luvussa on perustietoja funktion derivaatasta. Luvun alussa esitetään toinen tapa kirjoittaa funktion erotusosamäärä kohdassa $a$. Muotoa tarvitaan, kun tässä kurssissa johdetaan eksponenttifunktion derivaatta. Muutoin luku on tiivistelmä kurssilla Derivaatta opitusta, ja lukua voidaan tarvittaessa käyttää perustietojen mieleenpalauttamiseen.

## Erotusosamäärä ja derivaatta

Funktion $f$ *erotusosamäärä kohdassa* $a$ on

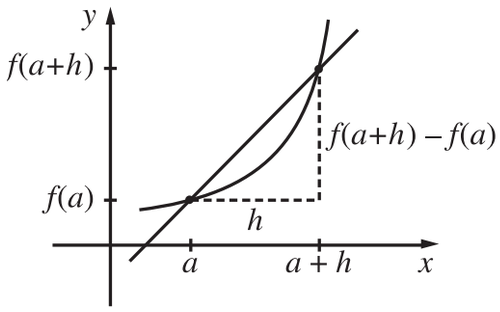
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$




Erotusosamäärä on sen suoran kulmakerroin, joka leikkaa funktion $f$ kuvaajaa muuttujan arvon $a$ kohdalla pisteessä $(a, f(a))$ ja toisen arvon $x$ kohdalla pisteessä $(x, f(x))$.

Jos merkitään $x - a = h$, jolloin $x = a + h$, erotusosamäärä tulee muotoon

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$




Funktio $f$ on *derivoituva kohdassa* $a$, jos erotusosamäärällä

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

on raja-arvo kohdassa $a$. Raja-arvo on *funktion* $f$ *derivaatta kohdassa* $a$, ja se merkitään $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Käyttäen erotusosamäärän toista muotoa saadaan

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivaatta kohdassa $a$ on funktion $f$ kuvaajalle muuttujan arvon $a$ kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin. Kulmakertoimen suuruus riippuu tangentin jyrkkyydestä, joten derivaatta ilmaisee funktion arvojen kasvunopeuden kohdassa $a$.

Funktio ei ole derivoituva sellaisessa kohdassa, jossa se on epäjatkuva. Siis jos funktio $f$ on derivoituva kohdassa $a$, niin se on jatkuva kohdassa $a$.

## ESIMERKKI

Muodosta eksponenttifunktion $f(x) = 3^x$ erotusosamäärä kohdassa 1

a) muodossa $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

b) muodossa $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

**Ratkaisu**

a) Funktion $f(x) = 3^x$ erotusosamäärä $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ kohdassa $a = 1$ on

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3^x - 3^1}{x - 1} = \frac{3^x - 3}{x - 1}.$$

b) Funktion $f(x) = 3^x$ erotusosamäärä $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ kohdassa $a = 1$ on

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{3^{1+h} - 3^1}{h} = \frac{3^{1+h} - 3}{h}.$$

**Vastaus**

a) $\dfrac{3^x - 3}{x - 1}$ b) $\dfrac{3^{1+h} - 3}{h}$

## Tehtäviä

**1.** Muodosta eksponenttifunktion $f(x) = 2^x$ erotusosamäärä $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ kohdassa $a = 3$. Määritä likiarvo derivaatalle $f'(3)$ laskemalla erotusosamäärän arvo, kun $x = 3{,}001$. Anna likiarvo kolmen desimaalin tarkkuudella.

**2.** Muodosta eksponenttifunktion $f(x) = 3^x$ erotusosamäärä $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ kohdissa $a = 2$ ja $a = 0$. Määritä derivaattojen $f'(2)$ ja $f'(0)$ likiarvot laskemalla erotusosamäärien arvot, kun $h = 0{,}001$. Anna likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.

**3.** Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa 3 erotusosamäärän raja-arvona käyttämällä erotusosamäärän muotoa

a) $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ b) $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

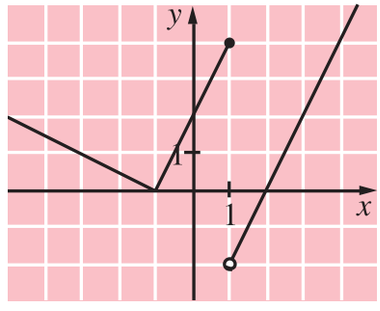
**4.** Muodosta funktion $f(x) = \sqrt{x}$ erotusosamäärä $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ kohdassa $a = 4$ ja laske neljän desimaalin tarkkuudella erotusosamäärän arvo, kun $x$ on a) 4,01 b) 4,001 c) 3,999.

d) Mikä näyttää olevan funktion $f(x) = \sqrt{x}$ derivaatta kohdassa 4?

**5.** Muodosta funktion $f(x) = \sqrt{x}$ erotusosamäärä $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ kohdassa $a = 16$ ja laske neljän desimaalin tarkkuudella erotusosamäärän arvo, kun $h$ on a) 0,1 b) 0,01 c) –0,01.

d) Mikä näyttää olevan funktion $f(x) = \sqrt{x}$ derivaatta kohdassa 16?

**6.** Funktion $f$ kuvaaja muodostuu kahdesta puolisuorasta ja janasta. Missä kohdissa funktio $f$ ei ole a) jatkuva b) derivoituva? Mikä funktion $f$ derivaatta on muissa kohdissa?



## Derivaattafunktio

Funktio $f'$, jonka arvo on funktion $f$ derivaatta jokaisessa kohdassa, jossa $f$ on derivoituva, on funktion $f$ *derivaattafunktio*. Funktion $f$ derivaattafunktio voidaan ilmaista myös derivointioperaattorin $\mathrm{D}$ avulla:

$\mathrm{D}f(x) = f'(x)$.

Vakiofunktion derivaattafunktio on vakiofunktio $0$:

$$\mathrm{D}c = 0.$$

Potenssifunktiot $x^n$, missä $n$ on kokonaisluku, derivoidaan kaavalla

$$\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}.$$

Eksponentti pienenee yhdellä, ja alkuperäinen eksponentti tulee potenssin kertoimeksi.

Vakiolla kerrotun funktion derivaattafunktio on funktion derivaattafunktio kerrottuna samalla vakiolla:

$$\mathrm{D}(kf(x)) = k\mathrm{D}f(x).$$

Funktioiden summan derivaattafunktio on derivaattafunktioiden summa:

$$\mathrm{D}(f + g) = f' + g'.$$

### Tehtäviä

**7.** Derivoi funktio. a) $\frac{1}{6}x^3$ b) $\frac{3}{x}$ c) $\frac{1}{6x^2}$

**8.** Mikä on funktion $f(x) = \frac{2}{x^3}$ kuvaajalle muuttujan arvon $3$ kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin?

**9.** Kun ilmapalloon, jonka tilavuus oli $35\,000\ \mathrm{cm}^3$, oli tullut pieni vuoto, pallon tilavuus $t$ sekunnin kuluttua oli $V(t) = 35\,000 - 25t + 0{,}0050t^2$, missä $0 \leqslant t \leqslant 2000$. Millä nopeudella ilmapallo tyhjeni (yksikkönä $\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$) viiden minuutin kuluttua?

## Funktion potenssin, funktioiden tulon ja funktioiden osamäärän derivaatta

Derivoituvan funktion potenssi derivoidaan kaavalla

$$\mathrm{D}f(x)^n = nf(x)^{n-1}f'(x).$$

Kertojana on alkuperäinen eksponentti.
Eksponentti pienenee yhdellä.
Kolmantena tekijänä on potenssiin korotetun funktion derivaatta.

Kahden derivoituvan funktion tulo derivoidaan kaavalla

$$\mathrm{D}(fg) = f'g + fg'.$$

Kahden derivoituvan funktion osamäärä derivoidaan kaavalla

$$\mathrm{D}\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

### Tehtäviä

**10.** Derivoi funktio.

a) $(x^3 + 5)^4$ b) $\dfrac{1}{(4x + 5)^2}$

**11.** Derivoi funktio $f(x) = x^4(3x + 1)^5$.

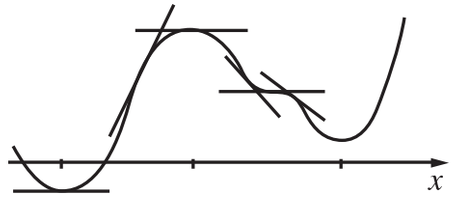
**12.** Derivoi funktio.

a) $\dfrac{3x - 2}{x - 4}$ b) $\dfrac{x^2}{x^3 - 1}$

## Derivaatta ja monotonisuus

Jos jollakin välillä on $f'(x) \geqslant 0$ kaikissa välin pisteissä ja $f'(x) = 0$ vain erillisissä välin pisteissä, niin funktio $f$ on tällä välillä aidosti kasvava.

Jos jollakin välillä on $f'(x) \leqslant 0$ kaikissa välin pisteissä ja $f'(x) = 0$ vain erillisissä välin pisteissä, niin funktio $f$ on tällä välillä aidosti vähenevä.




Kohdat, joissa funktio vasemmalta oikealle kuljettaessa vaihtuu aidosti kasvavasta aidosti väheneväksi, ovat funktion *maksimikohtia*. Vastaavasti kohdat, joissa funktio vaihtuu aidosti vähenevästä aidosti kasvavaksi, ovat funktion *minimikohtia*. Nämä niin sanotut *ääriarvokohdat* voidaan päätellä funktion kulkukaaviosta. Funktion arvot ääriarvokohdissa ovat funktion *ääriarvoja* (maksimi- tai minimiarvoja).

### Tehtäviä

**13.** Osoita, että

a) funktio $f(x) = x^5 + 7x^3 + 9$ on kaikkialla aidosti kasvava

b) funktio $g(x) = -x^3 - x^2 - x$ on kaikkialla aidosti vähenevä.

**14.** Missä funktio $g(x) = 18x^2 - x^4$ on kasvava ja missä vähenevä? Mitkä ovat funktion $g$ ääriarvokohdat ja ääriarvot?

## Derivoituvan funktion suurin ja pienin arvo

Kohdat, joissa derivoituva funktio saa suurimman tai pienimmän arvon, voidaan löytää selvittämällä funktion kulku derivaattafunktion merkkien avulla.

Jos on määritettävä derivoituvan funktion $f$ suurin tai pienin arvo suljetulla välillä $[a, b]$, niin voidaan menetellä myös toisin: Suljetulla välillä $[a, b]$ funktio $f$ saa suurimman (pienimmän) arvon joko välillä $]a, b[$ olevassa derivaattafunktion nollakohdassa tai jommassakummassa välin päätepisteessä. Suurin (pienin) arvo voidaan siis löytää niin, että määritetään välillä $]a, b[$ olevat derivaattafunktion $f'$ nollakohdat ja lasketaan funktion $f$ arvot derivaattafunktion nollakohdissa ja välin päätepisteissä $a$ ja $b$.

### Tehtäviä

**15.** Mikä on pienin arvo, jonka funktio $f(x) = -x^3 + 75x + 100$ saa välillä
a) $]-\infty, 4]$ b) $]-\infty, 11]$?

**16.** Mikä on funktion $g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}$ suurin arvo välillä $[-2, -1]$?

# Juurifunktiot ja juuriyhtälöt

**Ongelma 1**

a) Määritä $\sqrt[5]{1024}$. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön $x^5 = 1024$?

b) Määritä $\sqrt[5]{-1024}$. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön $x^5 = -1024$?

c) Määritä $\sqrt[6]{729}$. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön $x^6 = 729$?

d) Määritä $\sqrt[6]{-729}$. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön $x^6 = -729$?

### Juurifunktion $\sqrt[n]{x}$ määritelmä

Funktion $\sqrt[n]{x}$ määrittelyjoukko ja määritelmä riippuu siitä, onko positiivinen kokonaisluku $n$ parillinen vai pariton.

***n* pariton.** Funktio $\sqrt[n]{x}$ on määritelty kaikilla muuttujan $x$ arvoilla eli funktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Funktion arvo on se (yksikäsitteisesti määrätty) luku, joka korotettuna potenssiin $n$ antaa tulokseksi luvun $x$.

***n* parillinen.** Funktio $\sqrt[n]{x}$ on määritelty, kun $x \geqslant 0$, eli funktion määrittelyjoukko on väli $[0, \infty[$. Funktion arvo on se *epänegatiivinen* luku, joka korotettuna potenssiin $n$ antaa tulokseksi luvun $x$.

Funktio $\sqrt[2]{x}$ on *neliöjuurifunktio*, ja se merkitään lyhyemmin $\sqrt{x}$.

Funktio $\sqrt[3]{x}$ on *kuutiojuurifunktio*.

## ESIMERKKI 1

Mikä funktion määrittelyjoukko on?

a) $\sqrt{9-x^2}$ b) $\sqrt[3]{9-x^2}$

**Ratkaisu**

a) Neliöjuuri (kuten muutkin parilliset juurifunktiot) on määritelty vain epänegatiivisilla juurrettavan arvoilla. Siis tulee olla

$9-x^2 \geqslant 0.$

Ratkaistaan toisen asteen epäyhtälö määrittämällä funktion $9-x^2$ nollakohdat ja selvittämällä funktion merkit.

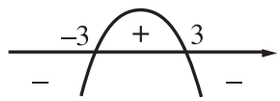
Ratkaistaan funktion $9-x^2$ nollakohdat.

$9-x^2=0$

$x^2=9$

$x=3$ tai $x=-3$

Funktion $9-x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.




Funktion $9-x^2$ arvot ovat epänegatiivisia, kun $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

Funktion $\sqrt{9-x^2}$ määrittelyjoukko on väli $[-3, 3]$.

b) Kuutiojuuri (kuten muutkin parittomat juurifunktiot) on määritelty kaikilla juurrettavan arvoilla. Siis funktion $\sqrt[3]{9-x^2}$ arvo voidaan laskea kaikilla muuttujan $x$ arvoilla. Funktion määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

**Vastaus**

a) väli $[-3, 3]$ b) reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$

**Ongelma 2** Pohdi, pitääkö väite paikkansa.

a) Jos $a^2 = b^2$, niin $a = b$.

b) Jos $a^3 = b^3$, niin $a = b$.

## JOHDANTOESIMERKKI 2

Kun yhtälön $\sqrt{x+1} = x - 5$ molemmat puolet korotetaan potenssiin kaksi, saadaan yhtälö $x + 1 = (x - 5)^2$.

a) Ratkaise yhtälö $x + 1 = (x - 5)^2$.

b) Tutki, toteuttavatko a-kohdan yhtälön juuret alkuperäisen yhtälön $\sqrt{x+1} = x - 5$. Mikä yhtälön $\sqrt{x+1} = x - 5$ ratkaisu on?

**Ratkaisu**

a) Ratkaistaan yhtälö $x + 1 = (x - 5)^2$.

$$x + 1 = (x - 5)^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$x + 1 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

Yhtälö ratkaistaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2}$$

$x = 8$ tai $x = 3$

b) Tutkitaan, toteuttavatko luvut 8 ja 3 yhtälön $\sqrt{x+1} = x - 5$.

Sijoitetaan yhtälöön luku 8.

$$\sqrt{8+1} = 8 - 5$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$3 = 3$$

tosi

Luku 8 toteuttaa yhtälön $\sqrt{x+1} = x - 5$.

Sijoitetaan yhtälöön luku 3.

$$\sqrt{3+1} = 3-5$$
$$\sqrt{4} = -2$$
$$2 = -2$$

epätosi

Luku 3 ei toteuta yhtälöä $\sqrt{x+1} = x-5$.

Yhtälön $\sqrt{x+1} = x-5$ ratkaisu on $x = 8$.

**Vastaus**

a) $x = 8$ tai $x = 3$
b) Luku 3 ei toteuta, luku 8 toteuttaa. Yhtälön ratkaisu on $x = 8$.

Kun ratkaistaan juurifunktioiden yhtälöitä, yhtälön molemmat puolet joudutaan usein korottamaan johonkin potenssiin.

### Yhtälön korottaminen parilliseen potenssiin

Jos eksponentti $n$ on parillinen, niin siitä, että $a^n = b^n$, ei välttämättä seuraa, että $a = b$, koska myös vastalukujen parilliset potenssit ovat yhtä suuret.

Esimerkiksi on $4^2 = (-4)^2$, vaikka luvut 4 ja $-4$ ovat eri suuret.

Kun yhtälön molemmat puolet korotetaan potenssiin kaksi (tai johonkin muuhun parilliseen potenssiin), yhtälö ei siten välttämättä säily yhtäpitävänä. Neliöön korotetulla yhtälöllä saattaa olla juuria, jotka eivät toteuta alkuperäistä yhtälöä.

Kun yhtälön $\sqrt{x+1} = x-5$ molemmat puolet korotetaan potenssiin kaksi, saadaan yhtälö $x + 1 = (x-5)^2$. Johdantoesimerkissä 2 nähtiin, että luku 3 toteuttaa jälkimmäisen yhtälön, mutta ei toteuta alkuperäistä yhtälöä.*

* Luku 3 toteuttaa yhtälön $\sqrt{x+1} = -(x-5)$.

Vääriltä juurilta voidaan välttyä kahdella tavalla:

### Tarkistaminen

Juuret, jotka on saatu neliöön (tai muuhun parilliseen potenssiin) korotetusta yhtälöstä, tarkistetaan sijoittamalla ne johonkin neliöönkorotusta edeltävään yhtälön muotoon. Tarkistaminen on tällöin välttämätön osa yhtälön ratkaisua.

### Neliöönkorotusehto

Vaihtoehtoinen menetelmä on, että päätellään niin sanottu *neliöönkorotuksen yhtäpitävyysehto* eli *neliöönkorotusehto*, joka ilmaisee, milloin yhtälön molemmat puolet ovat samanmerkkiset. Neliöönkorotusehto takaa, että yhtälön vasemman ja oikean puolen arvot eivät voi olla toistensa vastalukuja.

Kun yhtälö korotetaan potenssiin kaksi (tai johonkin muuhun parilliseen potenssiin) ja näin saatu yhtälö ratkaistaan, niin saaduista juurista alkuperäisen yhtälön juuria ovat ne, jotka toteuttavat neliöönkorotusehdon.

Molempia menetelmiä, tarkistamista ja neliöönkorotusehtoa, havainnollistetaan seuraavassa esimerkissä.

## Yhtälön korottaminen parittomaan potenssiin

Kun yhtälön molemmat puolet korotetaan samaan parittomaan potenssiin, saatu yhtälö on yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön kanssa.

## ESIMERKKI 3

Määritä funktion $f(x) = \sqrt{5 - 2x} + 2x - 3$ nollakohdat.

**Ratkaisu**

Funktio $f(x) = \sqrt{5 - 2x} + 2x - 3$ on määritelty, kun juurrettava $5 - 2x$ on epänegatiivinen.

$$5 - 2x \geqslant 0$$

$$-2x \geqslant -5 \qquad \big| : (-2) < 0 \qquad \text{Epäyhtälön suunta vaihtuu.}$$

$$x \leqslant \frac{5}{2}$$

Funktion $f$ määrittelyjoukko on $]-\infty, \frac{5}{2}]$.

Yhtälön $\sqrt{5 - 2x} + 2x - 3 = 0$ ratkaisemiseksi yhtälön termejä siirretään niin, että neliöjuuri jää yksinään toiselle puolelle.

$$\sqrt{5 - 2x} + 2x - 3 = 0$$

$$\sqrt{5 - 2x} = 3 - 2x$$

Yhtälöstä poistetaan neliöjuuri korottamalla yhtälön molemmat puolet potenssiin kaksi. Voidaan edetä kahdella eri tavalla.

*Tapa 1.* Ratkaistaan neliöön korottamalla saatu yhtälö ja tarkistetaan saadut juuret sijoittamalla ne johonkin neliöönkorotusta edeltävään yhtälön muotoon.

$$5 - 2x = (3 - 2x)^2$$

$$5 - 2x = 9 - 12x + 4x^2$$

$$4x^2 - 10x + 4 = 0 \qquad \big| : 2$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$x = 2 \text{ tai } x = \frac{1}{2}$$

Molemmat juuret kuuluvat funktion $f$ määrittelyjoukkoon $]-\infty, \frac{5}{2}]$.

Tarkistetaan juuret sijoittamalla ne yhtälöön $\sqrt{5-2x} = 3-2x$.

Sijoitetaan juuri $x = 2$.

$$\sqrt{5-2\cdot 2} = 3-2\cdot 2$$

$$\sqrt{1} = -1$$

$$1 = -1$$

epätosi

Luku $x = 2$ ei toteuta alkuperäistä yhtälöä.

Sijoitetaan juuri $x = \frac{1}{2}$.

$$\sqrt{5-2\cdot\frac{1}{2}} = 3-2\cdot\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$2 = 2$$

tosi

Luku $x = \frac{1}{2}$ toteuttaa alkuperäisen yhtälön. Funktion $f$ ainoa nollakohta on $\frac{1}{2}$.

*Tapa 2.* Ennen neliöönkorotusta muotoillaan neliöönkorotusehto, joka takaa, että yhtälön molemmat puolet ovat samanmerkkiset.

Koska yhtälön

$$\sqrt{5-2x} = 3-2x$$

vasen puoli on epänegatiivinen, myös oikean puolen tulee olla epänegatiivinen.

$$\begin{aligned} 3-2x &\geqslant 0 \\ -2x &\geqslant -3 \qquad \big| : (-2) < 0 \\ x &\leqslant \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Yhtälön $\sqrt{5-2x} = 3-2x$ neliöönkorotusehto on $x \leqslant \frac{3}{2}$.

Ratkaistaan neliöön korottamalla saatu yhtälö.

$$\begin{aligned} 5-2x &= (3-2x)^2 \\ 5-2x &= 9-12x+4x^2 \\ 4x^2-10x+4 &= 0 \qquad \big| : 2 \\ 2x^2-5x+2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$x = 2$ tai $x = \frac{1}{2}$

Molemmat juuret kuuluvat funktion $f$ määrittelyjoukkoon $]-\infty, \frac{5}{2}]$.

Vain juuri $x = \frac{1}{2}$ toteuttaa neliöönkorotusehdon $x \leqslant \frac{3}{2}$.

Funktion $f$ ainoa nollakohta on $\frac{1}{2}$.

**Vastaus** $\frac{1}{2}$

# TEHTÄVIÄ

## SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**17.** Ratkaise yhtälö. Ilmoita juurten tarkat arvot ja kaksidesimaaliset likiarvot.

a) $x^5 = 7$ b) $x^5 = -7$

c) $x^6 = 7$ d) $x^6 = -7$

**18.** Mikä funktion määrittelyjoukko on?

a) $\sqrt{2x+4}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{2x+4}}$

c) $\sqrt{-x-3}$ d) $\sqrt[3]{-x+1}$

**19.** Ratkaise yhtälö.

a) $\sqrt{3x-2} = x-2$

b) $1-x = \sqrt{7-x}$

**20.** Ratkaise yhtälö.

a) $\sqrt{x} = 3$

b) $\sqrt{x} = -3$

c) $\sqrt{-x} = 3$

**21.** Ratkaise yhtälö.

a) $\sqrt{x} + 6 = x$

b) $3\sqrt{x} + x = 10$

**22.** a) Millä muuttujan arvoilla yhtälö $\sqrt{8-4x} = 3\sqrt{x}$ on määritelty?

b) Ratkaise yhtälö $\sqrt{8-4x} = 3\sqrt{x}$.

**23.** a) Mikä funktion $f(x) = 2x + \sqrt{3-x}$ määrittelyjoukko on?

b) Määritä funktion $f$ nollakohdat.

**24.** a) Mikä funktion $g(x) = \sqrt{25-x^2} + x + 1$ määrittelyjoukko on?

b) Määritä funktion $g$ nollakohdat.

**25.** Ratkaise yhtälö.

a) $x\sqrt{x} - 4 = 0$

b) $x\sqrt{x} - 4x = 0$

c) $x\sqrt{x} - 4x^2 = 0$

**26.** Ratkaise yhtälö.

a) $\sqrt[3]{x} = x$

b) $\sqrt[3]{2x-x^2} = x$

## SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**27.** Mikä funktion määrittelyjoukko on?

a) $\sqrt{1-2x} + \sqrt{1-x^2}$

b) $\sqrt{1-2x} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

**28.** Ratkaise yhtälö.

a) $2\sqrt{x} = 1$

b) $\sqrt[3]{x} = -4$

c) $3\sqrt{x} + 1 = 0$

**29.** Ratkaise yhtälö.

a) $x + 3 = \sqrt{3-x}$

b) $x - 2 = \sqrt{5-4x}$

**30.** Ratkaise yhtälö.

a) $5\sqrt{x} + 6 = x$

b) $x + \sqrt{x+5} = 7$

**31.** Ratkaise yhtälö.

a) $x - 3\sqrt{x} = 0$

b) $x + 3\sqrt{x} = 0$

c) $x^2 - 3\sqrt{x} = 0$

**32.** a) Mikä funktion $g(x) = 3\sqrt{x^2 + 1} + 5x$ määrittelyjoukko on?
b) Määritä funktion $g$ nollakohdat.

**33.** a) Mikä funktion
$h(x) = \sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{-x - 1}$
määrittelyjoukko on?
b) Määritä funktion $h$ nollakohdat.

**34.** Ratkaise yhtälö.

a) $1 - \sqrt{x + 2} = x$

b) $1 + \sqrt{x + 2} = -x$

**35.** Ratkaise yhtälö.

a) $4\sqrt[3]{x} = x$

b) $\sqrt[3]{2x + 1} = x + 1$

**36.** Ratkaise yhtälö.

a) $\sqrt[3]{x} = 2\sqrt{x}$

b) $\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[4]{x}$

**37.** Ratkaise yhtälö $3\sqrt{x} - \sqrt{1 - x} = 1$.

# Juurifunktioiden derivaatta

Juurifunktioiden derivointikaavoissa juuret ilmaistaan murtopotensseina.

## Murtopotenssi $x^{\frac{m}{n}}$

Potenssi $x^{\frac{1}{n}}$, missä $n$ on positiivinen kokonaisluku, on luvun $x$ $n$:s juuri:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

Esimerkiksi $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ja $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Potenssi $x^{\frac{m}{n}}$, missä $m$ ja $n$ ovat positiivisia kokonaislukuja, on luvun $x$ $m$:nnen potenssin $n$:s juuri:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

eli $n$:s juuri korotettuna potenssiin $m$:

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m.$$

Esimerkiksi $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{x})^2$.

Määritelmät yleistetään negatiivisille eksponenteille määrittelemällä:

$$x^{-r} = \frac{1}{x^r}.$$

Potenssin $x^r$ käänteisluku.

Esimerkiksi $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$.

## Funktioiden $x^{\frac{m}{n}}$ määrittelyjoukko

Murtopotenssifunktiot $x^{\frac{m}{n}}$ määritellään, kun $x > 0$, eli niiden määrittelyjoukko on $]0, \infty[$.*

---

* Monet murtopotenssit voitaisiin määritellä myös negatiivisilla muuttujan arvoilla ja arvolla 0, esimerkiksi $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$. Yleensä kuitenkin muuttujan arvot rajataan positiivisiin lukuihin. Näin taataan potenssikaavojen voimassaolo ja mahdollisuus sieventää käyttämällä murtolukujen ominaisuuksia (esimerkiksi $x^{\frac{2}{6}} = x^{\frac{1}{3}}$). Joskus käytetään silti (esimerkiksi derivointikaavoissa) murtopotenssimerkintöjä (kuten $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$) koko reaalilukujen joukossa.

## ESIMERKKI 1

a) Ilmaise funktio $x\sqrt{x}$ murtopotenssimuodossa.

b) Ilmaise funktio $x^{-\frac{5}{2}}$ juurimuodossa.

**Ratkaisu**

a) Ilmaistaan neliöjuuri potenssina ja käytetään potenssikaavoja.

$$x\sqrt{x} = x^1 x^{\frac{1}{2}}$$

Samankantaisten potenssien tulo: $x^r x^s = x^{r+s}$.

$$= x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

b) $$x^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$$

$x^{-r} = \frac{1}{x^r}$

$$= \frac{1}{x^{2+\frac{1}{2}}}$$

Erotetaan eksponentin kokonaisosa ja ilmaistaan potenssi tulona: $x^{r+s} = x^r x^s$.

$$= \frac{1}{x^2 x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

**Vastaus**

a) $x^{\frac{3}{2}}$ b) $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

Funktiot $x^n$, missä eksponentti $n$ on kokonaisluku, derivoidaan kaavalla

$$Dx^n = nx^{n-1}.$$

Samanlainen kaava pätee aina, kun eksponentti on rationaaliluku eli kun se on kirjoitettavissa muotoon $\frac{m}{n}$, missä $m$ ja $n$ ovat kokonaislukuja.

### Funktion $x^r$ derivointikaava

Jokainen funktio $x^r$, missä $r$ on rationaaliluku, derivoidaan kaavalla

$$Dx^r = rx^{r-1}.$$

Kun derivoidaan funktio $x^r$, niin eksponentti pienenee yhdellä ja alkuperäinen eksponentti tulee potenssin kertoimeksi.

Juurifunktiot derivoidaan tällä kaavalla kirjoittamalla ne ensin murtopotenssimuotoon.

Vaikka murtopotenssit on tapana määritellä vain positiivisille muuttujan arvoille, niin silloin kun $n$ on pariton, funktio $\sqrt[n]{x}$ voidaan derivoimista varten ilmaista muodossa $x^{\frac{1}{n}}$ koko reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$.

## Derivointikaavan johto

Merkitään $h(x) = x^{\frac{m}{n}}$, missä $m$ ja $n$ ovat kokonaislukuja ja $n$ on eri suuri kuin $0$. Funktiolle $h(x)$ pätee kaikilla muuttujan $x$ arvoilla

$$h(x)^n = (x^{\frac{m}{n}})^n = x^{\frac{m}{n} \cdot n} = x^m.$$

Siis funktio $h(x)^n$ on sama funktio kuin $x^m$, joten funktioilla $h(x)^n$ ja $x^m$ on sama derivaattafunktio.*

$$\mathrm{D}h(x)^n = \mathrm{D}x^m$$

$$nh(x)^{n-1}h'(x) = mx^{m-1}$$ Ratkaistaan funktio $h'(x)$.

$$h'(x) = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{h(x)^{n-1}}$$ Lavennetaan $h(x)$:llä.

$$= \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}h(x)}{h(x)^n}$$ Sijoitetaan $h(x) = x^{\frac{m}{n}}$ ja $h(x)^n = x^m$.

$$= \frac{m}{n}\frac{\cancel{x^{m-1}}^{\,1}\,x^{\frac{m}{n}}}{\cancel{x^m}_{\,x}}$$ Supistetaan.

$$= \frac{m}{n}\frac{x^{\frac{m}{n}}}{x} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

Siis $\mathrm{D}x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$.

---

* Oletetaan ilman perusteluja, että funktion $h(x) = x^{\frac{m}{n}}$ derivaattafunktio $h'(x)$ on olemassa eli että funktio $x^{\frac{m}{n}}$ on derivoituva.

## ESIMERKKI 2

Derivoi funktio. a) $\sqrt{x}$ b) $x\sqrt{x}$ c) $\dfrac{1}{3x^2\sqrt{x}}$

**Ratkaisu**

a) Ilmaistaan juurifunktio potenssina: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

$$\mathrm{D}\sqrt{x} = \mathrm{D}x^{\frac{1}{2}} \qquad \mathrm{D}x^r = rx^{r-1}$$

$$= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{Saatetaan lauseke takaisin juurimuotoon.}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) Ilmaistaan lauseke $x\sqrt{x}$ muuttujan $x$ potenssina.

$$x\sqrt{x} = x^1 x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

Derivoidaan.

$$\mathrm{D}x\sqrt{x} = \mathrm{D}x^{\frac{3}{2}} \qquad \mathrm{D}x^r = rx^{r-1}$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

c) Funktion $\dfrac{1}{3x^2\sqrt{x}}$ lauseke on vakiolla kerrottu muuttujan $x$ potenssi:

$$\frac{1}{3x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2 x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{2+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{5}{2}}.$$

Derivoidaan.

$$\mathrm{D}\frac{1}{3x^2\sqrt{x}} = \mathrm{D}\frac{1}{3}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{3}\mathrm{D}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}-1} = -\frac{5}{6}x^{-\frac{7}{2}}$$

$$= -\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}} = -\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x^{3+\frac{1}{2}}} = -\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x^3x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x^3\sqrt{x}} = -\frac{5}{6x^3\sqrt{x}}$$

**Vastaus** a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ c) $-\frac{5}{6x^3\sqrt{x}}$

Edellisen esimerkin vastauksen funktioiden suurimmat mahdolliset määrittelyjoukot ovat a-kohdassa $]0, \infty[$, b-kohdassa $[0, \infty[$ ja c-kohdassa $]0, \infty[$. Nämä ovat myös joukot, joissa vastaavat esimerkin funktiot $\sqrt{x}$, $x\sqrt{x}$ ja $\frac{1}{3x^2\sqrt{x}}$ ovat derivoituvia. b-kohdan funktion $x\sqrt{x}$ derivaatta määrittelyvälin $[0, \infty[$ päätepisteessä $0$ on niin sanottu *oikeanpuolinen derivaatta*.* Vastaavasti a-kohdan funktion $\sqrt{x}$ derivoitumattomuus kohdassa $0$ tarkoittaa, että oikeanpuolista derivaattaa ei ole.

Yleisesti voidaan osoittaa, että kohdat, joissa juurifunktio on derivoituva, nähdään derivointikaavalla muodostetun funktion lausekkeesta.

### Juurifunktioiden derivoituvuus

Juurifunktiot ovat derivoituvia siellä, missä derivointikaavalla muodostetun funktion arvo voidaan laskea.

---

* Funktion $f$ oikeanpuolinen derivaatta kohdassa $0$ on erotusosamäärän $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ raja-arvo, kun muuttujan $x$ arvot lähenevät nollaa oikealta (positiiviselta puolelta). Toispuolisiin (oikean- ja vasemmanpuolisiin) derivaattoihin perehdytään syventävässä kurssissa Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.

## ESIMERKKI 3

Määritä funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ kuvaajalle pisteeseen $(-8, -2)$ piirretyn tangentin yhtälö.

**Ratkaisu**

Tangentin kulmakerroin on funktion $f$ derivaatta kohdassa $-8$. Ilmaistaan kuutiojuuri murtopotenssina ja derivoidaan.

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

Siirrytään takaisin juurimuotoon: $x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$.

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}$$

Vaihtoehtoinen muoto on $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

$$= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

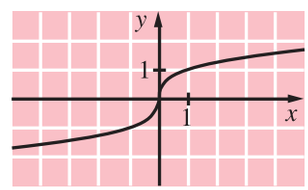
Funktiolla $f(x) = \sqrt[3]{x}$ on derivaatta, kun $x \neq 0$.*

Lasketaan tangentin kulmakerroin.

$$f'(-8) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{-8})^2} = \frac{1}{3 \cdot (-2)^2} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$$

---

* Funktion $\sqrt[3]{x}$ derivoitumattomuus kohdassa $x = 0$ ilmenee funktion kuvaajasta niin, että kuvaajalle origoon piirretty tangentti on pystysuora. Tangentilla ei siis ole kulmakerrointa.



Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - (-2) = \frac{1}{12}(x - (-8)) \qquad y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y + 2 = \frac{1}{12}x + \frac{8}{12}$$

$$y = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3}$$

**Vastaus** $y = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3}$

## ESIMERKKI 4

Määritä funktion $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{x}$ suurin ja pienin arvo.

**Ratkaisu** Funktion $f$ määrittelyjoukko on $]0, \infty[$.

Kun jaetaan termeittäin, funktion $f$ lauseke saadaan ilmaistuksi kahden potenssilausekkeen erotuksena.*

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$$ Jaetaan termeittäin.

$$= \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$= x^{-1} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^1}$$ Samankantaisten potenssien osamäärä: $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

$$= x^{-1} - x^{-\frac{1}{2}}$$

---

* Funktio $f(x)$ voidaan derivoida myös käyttämällä osamäärän derivointikaavaa. Jos lausekkeen jakajana on vain yksi termi, niin usein derivointi on yksinkertaisempaa, kun ensin jaetaan termeittäin.

Derivoidaan.

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} - (-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = -1 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{2}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$ Lavennetaan samannimisiksi:* $\sqrt{x}\sqrt{x} = x$.

$$= -\frac{2}{2x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2x^2}$$

$$= \frac{-2 + \sqrt{x}}{2x^2}$$

Funktiolla $f$ on derivaatta koko määrittelyjoukossa $]0, \infty[$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-2 + \sqrt{x}}{2x^2} = 0$$ Osamäärän arvo on nolla, kun osoittaja on nolla.

$$-2 + \sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

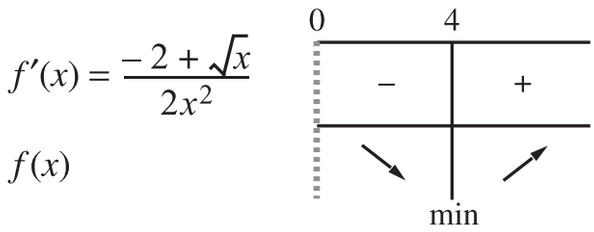
---

* Kun tällaisessa tilanteessa lausekkeet lavennetaan samannimisiksi ja suoritetaan yhteenlasku, derivaattafunktio tulee yleensä sellaiseen muotoon, että nollakohtien ja merkin tutkiminen on yksinkertaisempaa.

Laaditaan derivaattafunktion $f'(x) = \dfrac{-2+\sqrt{x}}{2x^2}$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion $f$ kulkukaavioksi. Derivaattafunktion nimittäjä $2x^2$ saa pelkästään positiivisia arvoja, joten derivaatan merkki riippuu osoittajan $-2+\sqrt{x}$ merkistä. Lasketaan osoittajan merkit muuttujan $x$ arvoilla $1$ ja $9$ ja kirjataan merkit merkkikaavioon.

$x = 1$: $-2 + \sqrt{1} = -2 + 1 = -1 < 0$

$x = 9$: $-2 + \sqrt{9} = -2 + 3 = 1 > 0$




Kulkukaavion mukaan funktiolla $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x}$ ei ole suurinta arvoa.

Funktion $f$ pienin arvo on $f(4) = \dfrac{1-\sqrt{4}}{4} = \dfrac{1-2}{4} = -\dfrac{1}{4}$.

**Vastaus** Ei suurinta arvoa, pienin arvo on $-\dfrac{1}{4}$.

# TEHTÄVIÄ

## SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**38.** Ilmaise lauseke murtopotenssimuodossa.

a) $x^2\sqrt{x}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{x}}$

c) $\dfrac{1}{5x^2\sqrt{x}}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$

**39.** Saata lauseke juurimuotoon.

a) $3x^{-\frac{1}{2}}$ b) $-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ c) $6x^{\frac{7}{2}}$

**40.** Derivoi funktio. Anna vastaus murtopotenssina.

a) $x^{\frac{3}{5}}$ b) $x^{-\frac{3}{4}}$

**41.** Derivoi.

a) $x^2\sqrt{x}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ c) $\dfrac{2}{3x\sqrt{x}}$

**42.** Derivoi.

a) $(1+\sqrt{x})^2$ b) $(1+\sqrt{x})^6$

**43.** Määritä funktion $f(x) = x\sqrt[3]{x}$ kuvaajalle muuttujan arvon $-1$ kohdalle piirretyn
a) tangentin b) normaalin kulmakerroin.

**44.** Mikä funktion $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ pienin arvo on?

**45.** Ilmaise lausekkeena luvun $x$ neliöjuuren ja luvun $x$ erotus. Millä $x$:n arvolla lausekkeen arvo on suurin, eli mikä luku on eniten neliöjuurtaan pienempi?

**46.** Osoita, että $\dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x} \geqslant 3$ kaikilla $x > 0$.

**47.** Osoita, että käyrät $y = x^2$ ja $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

**48.** Neliön pinta-ala on alussa nolla ja kasvaa sen jälkeen tasaisella nopeudella neliömetrin sekunnissa. Millä nopeudella neliön sivun pituus kasvaa
a) 0,5 sekunnin
b) 5 sekunnin
kuluttua?

**49.** Kuution tilavuus on alussa nolla ja kasvaa sen jälkeen tasaisella nopeudella kuutiometrin sekunnissa. Millä nopeudella kasvaa
a) kuution särmän pituus
b) kuution pinta-ala
0,5 sekunnin ja 5 sekunnin kuluttua?

## SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**50.** a) Ilmaise lausekkeet $\frac{1}{4}x\sqrt{x}$ ja $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ murtopotenssien avulla.

b) Saata lausekkeet $-5x^{-\frac{1}{3}}$ ja $-6x^{-\frac{3}{2}}$ juurimuotoon.

**51.** Ilmaise funktion lauseke muuttujan $x$ potenssina, derivoi ja saata derivaattafunktion lauseke juurimuotoon.

a) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ c) $\sqrt[3]{x^2}$

**52.** Derivoi funktio.

a) $x^{3,14}$ b) $x^{0,99}$

**53.** Funktion $f$ derivaattafunktion derivaattaa $(f')'$ kutsutaan funktion $f$ toiseksi derivaataksi ja se merkitään $f''$. Toisen derivaatan $f''$ derivaattaa $(f'')'$ kutsutaan kolmanneksi derivaataksi ja se merkitään $f'''$ ja niin edelleen.
Määritä $f'(x)$, $f''(x)$ ja $f'''(x)$, kun $f(x) = x\sqrt{x}$.

**54.** Derivoi funktio.

a) $(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})^2$ b) $(x - \frac{1}{\sqrt{x}})^2$

**55.** Missä pisteessä funktion $f(x) = 4\sqrt{x} - x$ kuvaajalle muuttujan arvon 9 kohdalle piirretty normaali leikkaa a) $x$-akselin b) $y$-akselin?

**56.** Määritä funktion $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$ derivaattafunktion nollakohdat.

**57.** Määritä funktion $g(x) = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}}$ pienin arvo.

**58.** Osoita, että yhtälöllä $x\sqrt{x} = 3x - 5$ ei ole juuria.

**59.** Osoita, että suora $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ sivuaa käyrää $y = \sqrt{x}$.

**60.** Kuinka monta juurta yhtälöllä $x^2 - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ on?

**61.** Käyrän $y = \sqrt{x}$, $x$-akselin ja suoran $x = 1$ rajaamaan alueeseen piirretään suorakulmio, jonka yksi sivu on $x$-akselilla, yksi sivu suoralla $x = 1$ ja yksi kärki käyrällä $y = \sqrt{x}$.
a) Piirrä kuvio.
b) Yksi suorakulmion kärkipisteistä on $x$-akselilla 0:n ja 1:n välissä. Ilmaise suorakulmion pinta-ala tämän kärkipisteen $x$-koordinaatin $x$ avulla.
c) Mikä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

**62.** Öljyn saastuttaman ympyrän muotoisen vesialueen pinta-ala kasvaa tasaisella nopeudella neliökilometrin vuorokaudessa. Millä nopeudella alueen säde kasvaa a) kahden b) viiden vuorokauden kuluttua öljyvahingosta?

**63.** Pallon muotoiseen ilmapalloon puhalletaan ilmaa niin, että pallon tilavuus kasvaa tasaisesti litran sekunnissa. Millä nopeudella kasvaa
a) pallon säde
b) pallon pinnan ala
kahden sekunnin ja 15 sekunnin kuluttua?
Oletetaan, että tilavuus alussa on nolla.

**64.** Missä kohdassa välillä $[0, 1]$ erotuksen $\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$ arvo on suurin? Mikä erotuksen suurin arvo on?

**65.** Irrationaalilukuja (esimerkiksi lukuja $\sqrt{2}$ ja $\pi$) ei voida ilmaista kahden kokonaisluvun osamääränä muodossa $\frac{m}{n}$. Jos $a$ on irrationaaliluku, potenssia $x^a$ ei siten voida suoraan määritellä juurten ja potenssien avulla. Potenssit määritellään tällöin raja-arvoina: Jokaiselle irrationaaliluvulle $a$ löytyy rationaaliluvuista muodostuva lukujono $r_1$, $r_2$, $r_3$, ..., jolla on raja-arvona luku $a$ eli jonka luvut ennen pitkää tulevat niin lähelle lukua $a$ kuin suinkin halutaan. Tällainen jono saadaan vaikkapa katkaisemalla luvun $a$ desimaaliesitys, esimerkiksi jono
3, 3,1, 3,14, 3,141, 3,1415, 3,14159 ...
lähestyy raja-arvonaan lukua $\pi$. Määritellään, että potenssin $x^a$ arvo on se luku, jota potenssien $x^{r_1}$, $x^{r_2}$, $x^{r_3}$, ... arvot lähenevät.
Voidaan osoittaa, että potenssin derivointikaava pätee myös silloin, kun eksponentti on irrationaaliluku. Siis kaava $Dx^a = ax^{a-1}$ pätee kaikilla eksponentin $a$ reaaliarvoilla.
a) Derivoi funktiot $x^\pi$ ja $x^{\sqrt{2}}$.
b) Määritä kahden numeron tarkkuudella erotuksen $x^{3,1415} - x^\pi$ suurin arvo välillä $[0, 1]$.

# Funktion $\sqrt[n]{f}$ derivaatta

Kun $n$ on kokonaisluku, niin derivoituvan funktion $f(x)$ potenssi $f(x)^n$ derivoidaan kaavalla

$$\mathrm{D}f(x)^n = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$$

eli

$$\mathrm{D}f^n = nf^{n-1}f'.$$

Sama kaava pätee aina, kun eksponentti on rationaaliluku.

### Funktion potenssin $f^r$ derivointikaava

Derivoituvan funktion $f$ jokainen potenssi $f^r$, missä $r$ on rationaaliluku, derivoidaan kaavalla

$$\mathrm{D}f(x)^r = rf(x)^{r-1} \cdot f'(x).$$

Kertojana on alkuperäinen eksponentti. Eksponentti pienenee yhdellä. Kolmantena tekijänä on potenssiin korotetun funktion derivaatta.

Funktiot $\sqrt[n]{f(x)}$ derivoidaan potenssin $f(x)^r$ derivointikaavalla kirjoittamalla ne ensin potenssimuotoon $f(x)^{\frac{1}{n}}$.

Funktion potenssin derivointikaava johdetaan kuten potenssin $x^{\frac{m}{n}}$ derivointikaava merkitsemällä $h = f^{\frac{m}{n}}$, derivoimalla yhtälön $h^n = f^m$ molemmat puolet ja ratkaisemalla yhtälöstä $h'$. Derivointikaavan johtaminen on tehtävänä 87.

## ESIMERKKI 1

Derivoi funktio. a) $\sqrt{x^3 + 5}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3 - x}}$

**Ratkaisu** Ennen derivoimista juuri ilmaistaan potenssina.

a) $\mathrm{D}\sqrt{x^3 + 5} = \mathrm{D}(x^3 + 5)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \mathrm{D}f^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2} - 1} f'$

$$= \frac{1}{2} \cdot (x^3 + 5)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot \mathrm{D}(x^3 + 5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (x^3 + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2$$ Lauseke saatetaan juurimuotoon.

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3 + 5}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 5}}$$

b) $\mathrm{D}\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} = \mathrm{D}\dfrac{1}{(3-x)^{\frac{1}{2}}}$

$= \mathrm{D}(3-x)^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad \mathrm{D}f^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}f^{-\frac{1}{2}-1}f'$

$= -\frac{1}{2} \cdot (3-x)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \mathrm{D}(3-x)$

$= -\frac{1}{2} \cdot (3-x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1)$

$= -\frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{(3-x)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-1)$ $\qquad a^{\frac{3}{2}} = a\sqrt{a}$

$= \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{(3-x)\sqrt{3-x}}$

$= \dfrac{1}{2(3-x)\sqrt{3-x}}$

**Vastaus** a) $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$ b) $\dfrac{1}{2(3-x)\sqrt{3-x}}$

## ESIMERKKI 2

Määritä funktion $h(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}$ derivaattafunktion nollakohdat.

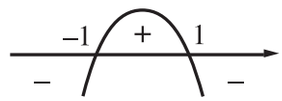
**Ratkaisu**

Funktio $h$ on määritelty, kun $1 - x^2 \geqslant 0$.

$1 - x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = 1$ tai $x = -1$




Siis $1 - x^2 \geqslant 0$, kun $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Funktion $h$ määrittelyjoukko on väli $[-1, 1]$.

Funktio $h(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}$ on funktioiden $x - 1$ ja $\sqrt{1-x^2}$ tulo.

$$h'(x) = \mathrm{D}(x-1) \cdot \sqrt{1-x^2} + (x-1) \cdot \mathrm{D}\sqrt{1-x^2} \qquad \mathrm{D}(fg) = f'g + fg'$$

$$= 1 \cdot \sqrt{1-x^2} + (x-1) \cdot \mathrm{D}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \mathrm{D}f^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}-1} f'$$

$$= \sqrt{1-x^2} + (x-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= \sqrt{1-x^2} + (x-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$$

$\sqrt{1-x^2}$

$$= \sqrt{1-x^2} - \frac{(x-1)x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{Lavennetaan samannimisiksi.}$$

$$= \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x^2)-(x^2-x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-x^2-x^2+x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2+x+1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Funktiolla $h$ on derivaatta, kun $1 - x^2 > 0$ eli kun muuttuja $x$ on välillä $]-1, 1[$.

Derivaattafunktion $h'(x)$ arvo on nolla, kun osoittajan arvo on nolla.

$-2x^2 + x + 1 = 0$

Ratkaisukaavalla: $x = 1$ tai $x = -\frac{1}{2}$.

Juuri $x = 1$ ei kuulu derivaattafunktion määrittelyjoukkoon.

Derivaattafunktion ainoa nollakohta on $-\frac{1}{2}$.

**Vastaus** $-\frac{1}{2}$

## ESIMERKKI 3

Mikä funktion $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{6 - 3x}$ suurin arvo on?

**Ratkaisu** Funktio $f$ on määritelty, kun $x \geqslant 0$ ja $6 - 3x \geqslant 0$. Jälkimmäinen epäyhtälö toteutuu, kun $x \leqslant 2$. Siis funktion $f$ määrittelyjoukko on suljettu väli $[0, 2]$.

Derivoidaan funktio $f$.

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{6 - 3x} = x^{\frac{1}{2}} + (6 - 3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(6 - 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{D}(6 - 3x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6 - 3x}} \cdot (-3)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{6 - 3x}}$$

Funktiolla $f$ on derivaatta, kun $0 < x < 2$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{6-3x}} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{6-3x}} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}^{*}$$

$$2\sqrt{6-3x} = 6\sqrt{x} \qquad \big| : 2$$

$$\sqrt{6-3x} = 3\sqrt{x}$$

Koska yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, yhtälö on yhtäpitävä neliöön korottamalla saadun yhtälön kanssa.

$$6 - 3x = 9x$$

$$-12x = -6$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Juuri $\frac{1}{2}$ sisältyy derivaattafunktion määrittelyjoukkoon $]0, 2[$.

Suljetulla välillä $[0, 2]$ funktio $f$ saa suurimman arvon joko välillä $]0, 2[$ olevassa derivaattafunktion nollakohdassa $\frac{1}{2}$ tai välin päätepisteessä.**

Lasketaan funktion $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{6-3x}$ arvo derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{6 - 3 \cdot \tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{9}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \approx 2{,}8$$

---

* Voitaisiin myös laventaa derivaattafunktion termit samannimisiksi, suorittaa vähennyslasku ja määrittää osoittajan nollakohdat.

** Voitaisiin myös selvittää derivaattafunktion merkit ja päätellä kulkukaaviosta kohta, jossa funktio $f$ saa suurimman arvon.

Lasketaan funktion $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{6 - 3x}$ arvo välin päätepisteissä.

$f(0) = \sqrt{0} + \sqrt{6 - 3 \cdot 0} = \sqrt{6} \approx 2{,}4$

$f(2) = \sqrt{2} + \sqrt{6 - 3 \cdot 2} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$

Arvoista suurin on $f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{\sqrt{2}}$. Funktion $f$ suurin arvo on

$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

**Vastaus** $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ *

* Vastauksen voi antaa kummassa tahansa muodossa.

# TEHTÄVIÄ

## SARJA I.
## PERUSTEHTÄVIÄ

**66.** Derivoi funktio.

a) $\sqrt{3x+2}$ b) $\sqrt{x^2-1}$

**67.** Derivoi.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{1-2x}}$ b) $(x^2-1)\sqrt{x^2-1}$

**68.** Missä pisteessä funktion $f(x)=\sqrt{4x+9}$ kuvaaja leikkaa $y$-akselin? Mikä kuvaajalle tähän pisteeseen piirretyn tangentin yhtälö on?

**69.** Määritä funktion $f(x)=x\sqrt{1-x}$ derivaattafunktion nollakohdat.

**70.** Määritä funktion $g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{24-2x}$ suurin ja pienin arvo.

**71.** Määritä funktion $f(x)=x+2\sqrt{x^2+1}$ derivaattafunktion nollakohdat.

**72.** Osoita, että funktio $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ on koko määrittelyjoukossaan aidosti vähenevä.

**73.** Osoita, että epäyhtälö $1+\dfrac{x}{2}\geqslant\sqrt{x+1}$ pätee funktion $\sqrt{x+1}$ koko määrittelyjoukossa $[-1, \infty[$. Millä muuttujan arvoilla yhtäsuuruus pätee?

**74.** Kuumailmapallo kohoaa suoraan ylöspäin tasaisella nopeudella 5,0 m/s. Juha seuraa ilmapallon nousua 100 metrin päässä pallon lähtöpaikasta. Millä nopeudella pallo etääntyy Juhasta, kun maasta irtoamisesta on kulunut
a) 5 sekuntia b) minuutti?

## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**75.** Derivoi funktio.

a) $\sqrt{3x-2}$ b) $(3x-2)\sqrt{3x-2}$

**76.** Derivoi.

a) $\sqrt{1-x^4}$ b) $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^4}}$

**77.** Määritä funktion $f(x)=\sqrt{4x-1}-x$ derivaattafunktion nollakohdat.

**78.** Epänegatiivisten lukujen $a$ ja $b$ summa on 1. Luvun $a$ neliöjuureen lisätään luvun $b$ neliöjuuri kaksinkertaisena. Mikä summan suurin mahdollinen arvo on?

**79.** a) Mikä funktion $f(x)=\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x}{2}$ määrittelyjoukko on?
b) Määritä funktion $f$ derivaattafunktion nollakohdat.
c) Mikä funktion $f$ arvojoukko on?

**80.** Suorakulmion kaksi sivua on positiivisilla koordinaattiakseleilla ja yksi kärki käyrällä $y=\sqrt{4-x}$.
a) Piirrä kuvio.
b) Yksi suorakulmion kärkipiste on $x$-akselilla 0:n ja 4:n välissä. Ilmaise suorakulmion pinta-ala tämän kärkipisteen $x$-koordinaatin $x$ avulla.
c) Mikä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

**81.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-4}}$ pienin arvo.

**82.** Osoita, että funktio $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ on kaikkialla aidosti kasvava.

**83.** Kuution muotoisen saippuan tilavuus uutena on $400\ \text{cm}^3$. Käytössä saippuan tilavuus pienenee tasaisesti $20\ \text{cm}^3$ viikossa. Millä nopeudella saippuan särmän pituus lyhenee, kun käyttöönotosta on kulunut a) kaksi viikkoa
b) 18 viikkoa?

**84.** Mikä funktion $g(x) = x\sqrt[3]{1 - x}$ suurin arvo on?

**85.** Mihin funktion $f(x) = \sqrt{4 - x}$ kuvaajan pisteeseen piirretty kuvaajan tangentti rajaa koordinaattiakselien kanssa pinta-alaltaan pienimmän kolmion?

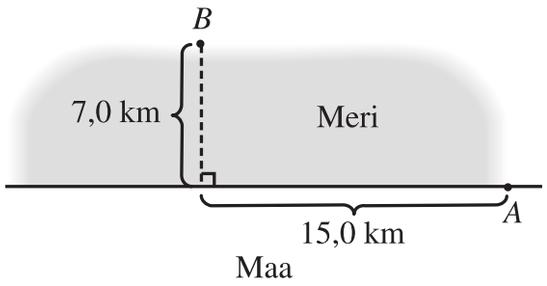
**86.** Osoita, että $\sqrt{1 + x} \geqslant 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ välillä $[0, \infty[$. Millä muuttujan arvoilla yhtäsuuruus pätee?

**87.** Osoita, että $\mathrm{D}f^r = rf^{r-1}f'$, kun $r$ on rationaaliluku.

# Juurifunktioiden sovelluksia

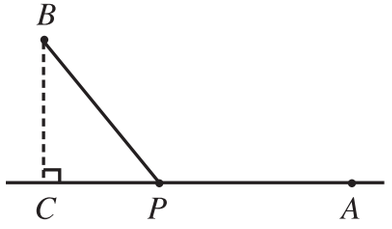
## ESIMERKKI 1

Rannassa sijaitsevalta muuntajalta $A$ on vedettävä sähkökaapeli saareen $B$. Kaapelointikustannukset kilometriä kohden ovat merellä 1,5-kertaiset verrattuna kaapelointikustannuksiin maalla. Määritä kaapelin reitti niin, että kokonaiskustannukset ovat mahdollisimman pienet.



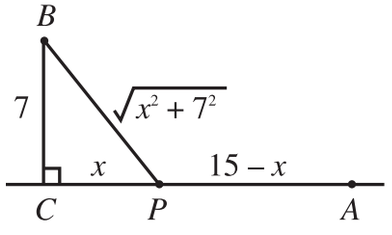

### Ratkaisu

Kaapeli kannattaa vetää rantaa seuraten johonkin rannan kohtaan $P$ ja sen jälkeen suoraan saareen. Kohtaa $P$ ei kannata valita janan $AC$ ulkopuolelta, sillä tällöin kaapelille tulee sekä ylimääräistä maamatkaa että ylimääräistä merimatkaa.




Valitaan muuttujaksi $x$ kohdan $P$ etäisyys kohdasta $C$. Muuttuja voidaan rajata suljetulle välille $[0, 15]$.

Matka, jonka kaapeli kulkee maalla, on $15 - x$ (km). Merkitään kaapelointikustannuksia kilometriä kohden maalla kirjaimella $k$. Kokonaiskustannukset maalla ovat tällöin $k(15 - x)$.




Matka, jonka kaapeli kulkee meren pohjassa, on $\sqrt{x^2 + 7^2} = \sqrt{x^2 + 49}$ (km). Kaapelointikustannukset merellä ovat kilometriä kohden $\frac{3}{2}k$ ja kaikkiaan $\frac{3}{2}k\sqrt{x^2 + 49}$.

Kustannukset kaapeloinnista ovat yhteensä

$$k(15 - x) + \frac{3}{2}k\sqrt{x^2 + 49} = k(15 - x + \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 49}).$$

Koska vakio $k$ on positiivinen, lausekkeen arvo on pienin silloin, kun funktion

$$f(x) = 15 - x + \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 49}$$

arvo on pienin.

Määritetään suljetun välin $[0, 15]$ kohta, jossa funktio $f$ saa pienimmän arvon.

Derivoidaan funktio $f$.

$$f(x) = 15 - x + \frac{3}{2}(x^2 + 49)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 49)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = -1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 49}} \cdot 2x$$

$$= -1 + \frac{3x}{2\sqrt{x^2 + 49}}$$ Lavennetaan samannimisiksi ja lasketaan yhteen.

$$= \frac{-2\sqrt{x^2 + 49} + 3x}{2\sqrt{x^2 + 49}}$$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$-2\sqrt{x^2 + 49} + 3x = 0$$

$$3x = 2\sqrt{x^2 + 49}$$

Funktion $f$ määrittelyjoukossa $[0, 15]$ yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, joten yhtälö on yhtäpitävä neliöön korottamalla saadun yhtälön kanssa.

$$9x^2 = 4(x^2 + 49)$$

$$9x^2 = 4x^2 + 196$$

$$5x^2 = 196$$

$$x^2 = \frac{196}{5}$$

$$x = \sqrt{\frac{196}{5}} = \frac{14}{\sqrt{5}} \approx 6{,}3 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{\frac{196}{5}} = -\frac{14}{\sqrt{5}} \approx -6{,}3$$

Negatiivinen juuri ei kuulu funktion $f$ määrittelyjoukkoon $[0, 15]$.

Ainoa välillä $]0, 15[$ oleva derivaattafunktion nollakohta on $\frac{14}{\sqrt{5}}$.

Lasketaan funktion $f(x) = 15 - x + \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 49}$ arvo derivaattafunktion nollakohdassa $\frac{14}{\sqrt{5}}$ ja välin $[0, 15]$ päätepisteissä.

$$f\left(\frac{14}{\sqrt{5}}\right) \approx 22{,}8$$

$$f(0) = 25{,}5$$

$$f(15) \approx 24{,}8$$

Funktio $f$ saa pienimmän arvon muuttujan arvolla $\frac{14}{\sqrt{5}} \approx 6{,}3$.

Kaapeli tulee vetää rannan kohtaan, jonka etäisyys kohdasta $C$ on 6,3 km ja muuntajasta 15,0 km – 6,3 km = 8,7 km.

**Vastaus** rantaa pitkin 8,7 km ja sitten suoraan saareen

Sovellustehtävissä muuttujan valinta saattaa vaikuttaa ratkaisun tekniseen vaativuuteen. Jos esimerkiksi edellisessä esimerkissä 1 olisi valittu muuttujaksi kaapelin rantautumiskohdan etäisyys muuntajasta, lasku olisi ollut teknisesti jonkin verran vaativampi.

Muuttujan valinnasta saattaa myös riippua, jääkö tutkittavan funktion lausekkeeseen lainkaan neliöjuuria. Tämä havainnollistuu seuraavassa esimerkissä 2.

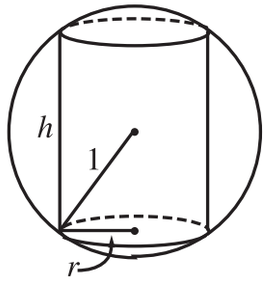
## ESIMERKKI 2

Pallon säde on 1. Mikä on pallon sisään mahtuvan tilavuudeltaan suurimman suoran ympyrälieriön pohjan säde ja korkeus?

### Ratkaisu

Suurimman ympyrälieriön pohjaympyrät ovat pallon pinnalla. Merkitään lieriön pohjan sädettä $r$ ja korkeutta $h$. Lieriön tilavuus on pohjan pinta-alan ja korkeuden tulo:

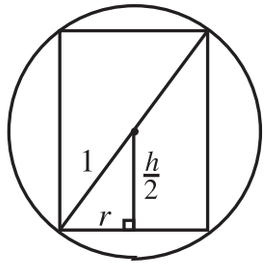
$$V = \pi r^2 h$$




Yhteys säteen $r$ ja korkeuden $h$ välille saadaan Pythagoraan lauseella:

$$r^2 + \left(\frac{1}{2}h\right)^2 = 1^2$$

$$r^2 + \frac{1}{4}h^2 = 1.$$



*Tapa 1.* Valitaan muuttujaksi lieriön korkeus $h$. Muuttuja $h$ voi vaihdella suljetulla välillä $[0, 2]$.

Koska $r^2 = 1 - \frac{1}{4}h^2$, niin lieriön tilavuus $V = \pi r^2 h$ muuttujan $h$ funktiona on

$$V(h) = \pi(1 - \frac{1}{4}h^2)h.$$

Koska kerroin $\pi$ on positiivinen, funktion $V(h)$ arvo on suurin, kun funktion

$$f(h) = (1 - \frac{1}{4}h^2)h = h - \frac{1}{4}h^3$$

arvo on suurin. Määritetään välin $[0, 2]$ kohta, jossa funktion $f$ arvo on suurin.

Derivoidaan ja ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(h) = 1 - \frac{3}{4}h^2$$

$$1 - \frac{3}{4}h^2 = 0$$

$$\frac{3}{4}h^2 = 1 \qquad | \cdot \frac{4}{3}$$

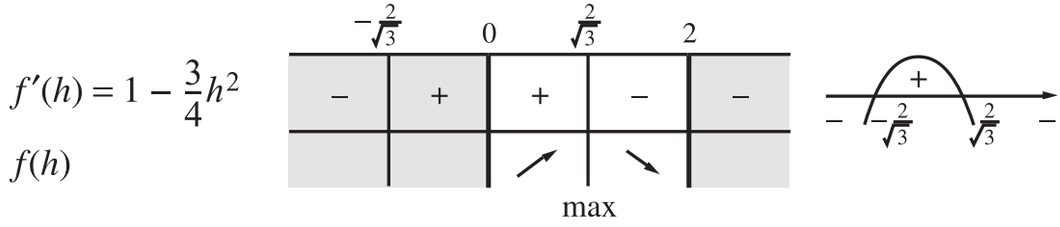
$$h^2 = \frac{4}{3}$$

$$h = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15 \text{ tai } h = -\frac{2}{\sqrt{3}} \approx -1{,}15$$

Välillä $]0, 2[$ on derivaattafunktion nollakohta $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio ja rajataan se välille $[0, 2]$.*

Derivaattafunktion $f'(h) = 1 - \frac{3}{4}h^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.




Funktio $f$ saa suurimman arvon kohdassa $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lieriön tilavuus on suurin, kun sen korkeus on $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Tällöin on:

$$r^2 = 1 - \frac{1}{4}h^2 = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Tilavuudeltaan suurimman lieriön pohjan säde on $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

*Tapa 2*. Valitaan muuttujaksi lieriön pohjaympyrän säde $r$. Muuttuja $r$ voi vaihdella suljetulla välillä $[0, 1]$.

Koska $\frac{1}{4}h^2 = 1 - r^2$, niin

$$h^2 = 4(1 - r^2)$$

$$h = 2\sqrt{1 - r^2}.$$

Lieriön tilavuus $V = \pi r^2 h$ muuttujan $r$ funktiona on

$$V(r) = \pi r^2 \cdot 2\sqrt{1 - r^2} = 2\pi r^2 \sqrt{1 - r^2}.$$

---

* Voidaan myös laskea funktion $f$ arvo derivaattafunktion nollakohdassa $\frac{2}{\sqrt{3}}$ sekä suljetun välin $[0, 2]$ päätepisteissä.

Koska kerroin $2\pi$ on positiivinen, funktion $V(r)$ arvo on suurin, kun funktion

$$f(r) = r^2\sqrt{1-r^2} = r^2(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$$

arvo on suurin.

Määritetään välin $[0, 1]$ kohta, jossa funktion $f$ arvo on suurin.

Derivoidaan.

$$f'(r) = 2r \cdot (1-r^2)^{\frac{1}{2}} + r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2r) \qquad \mathrm{D}(uv) = u'v + uv'$$

$$= 2r\sqrt{1-r^2} + r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \cdot (-2r)$$

$$= 2r\sqrt{1-r^2} - \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}$$

Lavennetaan samannimisiksi ja suoritetaan vähennyslasku.

$$= \frac{2r(1-r^2) - r^3}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{2r - 3r^3}{\sqrt{1-r^2}}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2r - 3r^3 = 0$$

$$r(2 - 3r^2) = 0$$

$$r = 0 \text{ tai } 2 - 3r^2 = 0$$

$$r = 0 \text{ tai } \quad 3r^2 = 2$$

$$r = 0 \text{ tai } r = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ tai } r = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Välillä $]0, 1[$ on derivaattafunktion nollakohta $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82$.

Lasketaan funktion $f(r) = r^2\sqrt{1-r^2}$ arvo kohdassa $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ja välin päätepisteissä 0 ja 1.

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$f(0) = 0$

$f(1) = 0$

Tilavuus on suurin, kun lieriön pohjan säde $r$ on $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Lieriön korkeus on tällöin

$$h = 2\sqrt{1-r^2} = 2\sqrt{1-\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

**Vastaus** pohjan säde $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82$, korkeus $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$

Seuraavassa tutustutaan kahteen keinoon, joilla joskus voi yksinkertaistaa tutkittavaa funktiota silloin, kun etsitään kohtaa, jossa funktio saa suurimman tai pienimmän arvon. Keinojen käyttäminen ei ole välttämätöntä.

Jos tutkittavassa funktiossa on neliöjuurilauseke, niin siitä voidaan joissakin tilanteissa vapautua käyttämällä hyväksi seuraavaa havaintoa.

### Funktion $f(x) = \sqrt{v(x)}$ suurin ja pienin arvo

Koska neliöjuurifunktio on koko määrittelyjoukossaan aidosti kasvava, neliöjuuren arvo on sitä suurempi, mitä suurempi juurrettava on. Siis funktio $f(x) = \sqrt{v(x)}$, missä $v(x) \geq 0$, saa suurimman arvon kohdassa, jossa funktio $v(x)$ saa suurimman arvon, ja pienimmän arvon kohdassa, jossa funktio $v(x)$ saa pienimmän arvon.

## ESIMERKKI 3

Määritä funktion $f(x) = \sqrt{12x - 3x^2}$ suurin arvo.

**Ratkaisu**

Funktio $f(x)$ on määritelty, kun $12x - 3x^2 \geqslant 0$.
Ratkaistaan toisen asteen epäyhtälö.

Määritetään funktion $12x - 3x^2$ nollakohdat.

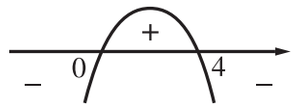
$12x - 3x^2 = 0$

$x(12 - 3x) = 0$

$x = 0$ tai $12 - 3x = 0$

$x = 0$ tai $x = 4$

Funktion $12x - 3x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.




Epäyhtälö $12x - 3x^2 \geqslant 0$ toteutuu, kun $0 \leqslant x \leqslant 4$.
Funktion $f(x) = \sqrt{12x - 3x^2}$ määrittelyjoukko on väli $[0, 4]$.

Koska neliöjuurifunktio on aidosti kasvava, funktio $f(x)$ saa suurimman arvonsa välillä $[0, 4]$ kohdassa, jossa funktion $u(x) = 12x - 3x^2$ arvo on suurin.

Koska funktion $u(x) = 12x - 3x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, funktio $u$ saa suurimman arvonsa huipun kohdalla derivaattafunktion nollakohdassa.

Derivoidaan funktio $u(x)$ ja ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$u'(x) = 12 - 6x$

$12 - 6x = 0$

$x = 2$

Funktion $u(x)$ suurin arvo on $u(2) = 12 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 12$.
Funktion $f(x)$ suurin arvo on

$f(2) = \sqrt{u(2)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

**Vastaus** $2\sqrt{3}$

Edellinen yksinkertaistamiskeino voidaan yleistää funktioille $u(x)\sqrt{v(x)}$, missä $u(x) \geqslant 0$.

### Funktion $f(x) = u(x)\sqrt{v(x)}$, missä $u(x) \geq 0$, suurin ja pienin arvo

Oletetaan, että tutkittava funktio on muotoa $f(x) = u(x)\sqrt{v(x)}$, missä $u(x) \geqslant 0$. Koska funktion $u(x)$ arvot ovat epänegatiivisia, niin $u(x) = \sqrt{u(x)^2}$, ja

$$f(x) = u(x)\sqrt{v(x)} = \sqrt{u(x)^2}\sqrt{v(x)} = \sqrt{u(x)^2 v(x)}.$$

Siis funktio $f(x) = u(x)\sqrt{v(x)}$ saa suurimman (pienimmän) arvon kohdassa, jossa funktio $g(x) = u(x)^2 v(x)$ saa suurimman (pienimmän) arvon.

## ESIMERKKI 4

Mikä on suurin arvo, jonka funktio $f(x) = x\sqrt{6 - x}$ saa suljetulla välillä $[0, 6]$?

**Ratkaisu**

Koska $6 - x \geqslant 0$, kun $x \leqslant 6$, funktio $f$ on määritelty välillä $[0, 6]$.

Välillä $[0, 6]$ on $x \geqslant 0$, joten $x = \sqrt{x^2}$ ja

$$f(x) = x\sqrt{6 - x} = \sqrt{x^2}\sqrt{6 - x} = \sqrt{x^2(6 - x)}.$$

Koska neliöjuurifunktio on aidosti kasvava, funktio $f$ saa suurimman arvonsa samassa kohdassa kuin funktio

$$g(x) = x^2(6 - x) = 6x^2 - x^3.$$

Määritetään välin $[0, 6]$ kohta, jossa funktion $g$ arvo on suurin.

Derivoidaan funktio $g$.

$$g'(x) = 12x - 3x^2$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$12x - 3x^2 = 0$$
$$x(12 - 3x) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } 12 - 3x = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 4$$

Välillä $]0, 6[$ on derivaattafunktion nollakohta 4. Lasketaan funktion $g(x) = x^2(6 - x)$ arvo derivaattafunktion nollakohdassa ja välin päätepisteissä.

$$g(4) = 4^2(6 - 4) = 32$$
$$g(0) = 0$$
$$g(6) = 0$$

Funktio $g(x) = x^2(6 - x)$ ja siis myös $f(x) = \sqrt{g(x)}$ saavat suurimman arvon kohdassa 4. Funktion $f$ suurin arvo on
$f(4) = \sqrt{g(4)} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$.

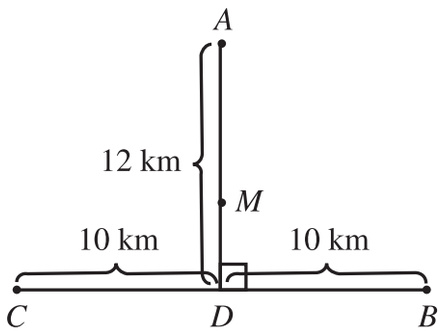
**Vastaus** $4\sqrt{2}$

# TEHTÄVIÄ

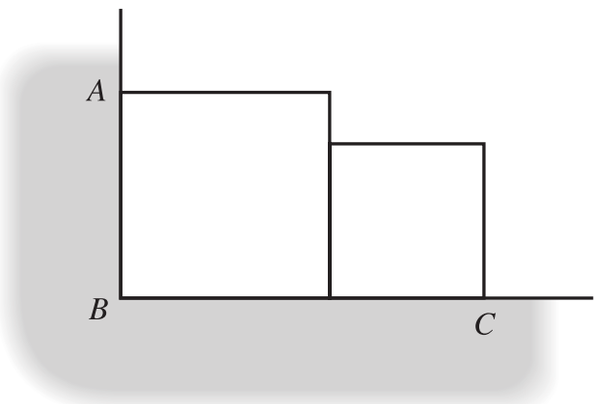
## SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**88.** Pitkin $x$-akselia kulkee polku. Muu koordinaatisto on vaikeakulkuista metsää, jossa kilometriä kohden kuluu kolme kertaa niin paljon aikaa kuin polkua pitkin juostessa. Minkä reitin valitsee suunnistaja, joka lähtee pisteestä $(0, 5)$ pisteessä $(3, 0)$ olevalle rastille?

**89.** Määritä maantien $AD$ varresta paikka muuntajalle $M$ niin, että suorien sähkölinjojen $MA$, $MB$ ja $MC$ yhteispituus on mahdollisimman pieni.

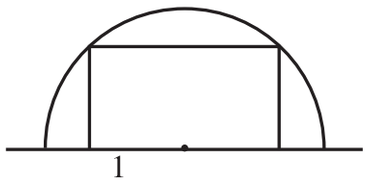



**90.** Kanavien risteykseen rajataan vierekkäiset neliön muotoiset tontit, joiden yhteenlaskettu pinta-ala on $5\,000\ \text{m}^2$. Määritä tonttien pinta-alat niin, että rantaviiva $ABC$ on mahdollisimman pitkä.



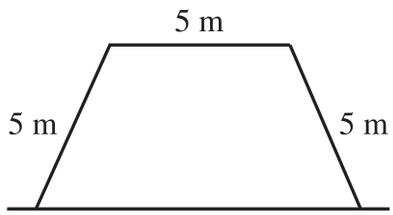

**91.** Suoran ympyräkartion sivujanan pituus on $1$. Määritä kartion pohjaympyrän säde ja kartion korkeus niin, että kartion tilavuus on mahdollisimman suuri.

**92.** Puoliympyrän säde on $1$. Puoliympyrän sisään on piirretty suorakulmio, jonka yksi sivu on puoliympyrän halkaisijalla. Mitkä pinta-alaltaan suurimman suorakulmion mitat ovat?



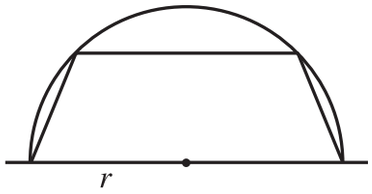

**93.** Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan ja toisen kateetin yhteenlaskettu pituus on $6$. Määritä kateetin pituus niin, että kolmion pinta-ala on mahdollisimman suuri. Kuinka pitkät kolmion muut sivut tällöin ovat?

**94.** Vajan pääty on muodoltaan tasakylkinen puolisuunnikas. Ylös tulevan vaakatuen ja sivutukien pituus on $5$ m. Määritä vajan leveys maan tasalla niin, että päädyn pinta-ala (ja siis myös vajan tilavuus) on mahdollisimman suuri.



**95.** Kaksi rautatietä risteää kohtisuorasti. Risteystä on kummallakin radalla lähestymässä juna. Toisella radalla oleva tavarajuna on 26 km:n päässä risteyksestä ja lähestyy risteystä nopeudella 90 km/h. Toisen radan matkustajajuna on 43 km:n päässä ja lähestyy nopeudella 120 km/h. Kuinka pitkän ajan kuluttua junien etäisyys toisistaan on pienin? Missä junat tällöin ovat?
(Ohje: Voit tulkita radat koordinaattiakseleiksi niin, että toinen juna on alussa esimerkiksi pisteessä $(26, 0)$ ja toinen pisteessä $(0, 43)$.)

**96.** Puoliympyrässä, jonka säde on $r$, on tasakylkinen puolisuunnikas, jonka yhtenä sivuna on ympyrän halkaisija. Kuinka pitkä halkaisijan vastainen puolisuunnikkaan sivu on, kun puolisuunnikkaan pinta-ala on mahdollisimman suuri? Kuinka monta prosenttia suurimman puolisuunnikkaan pinta-ala on puoliympyrän pinta-alasta?

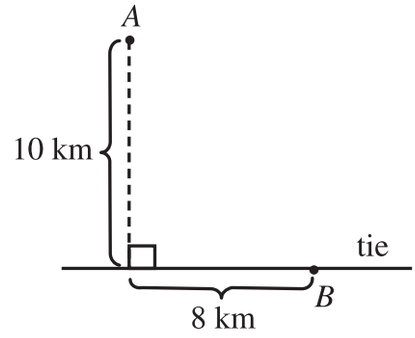



**97.** Pallon säde on $R$. Pallon sisään asetetaan tilavuudeltaan mahdollisimman suuri suora ympyräkartio. Mikä kartion tilavuus on?

**98.** Säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoisen teltan kattoa tukee neljä telttakeppiä, joiden jokaisen pituus on 3,00 metriä. Määritä pohjaneliön sivun pituus niin, että teltan tilavuus on mahdollisimman suuri.

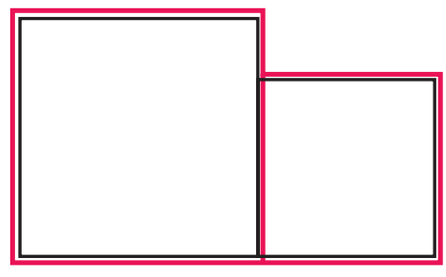
## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**99.** Sähköjohdon vetäminen metsään maksaa kilometriä kohden neljä kertaa niin paljon kuin johdon vetäminen pitkin tienvartta. Suunnittele sähköjohdon edullisin reitti korpimökistä $A$ muuntajalle $B$.




**100.** Aamulla pisteessä $(8, 0)$ suunniteltiin päivän vaellusta: Aamupäivällä kuljetaan pitkin $x$-akselia ja leiriydytään. Iltapäivällä mennään suorinta tietä kalaan pisteessä $(0, 7)$ sijaitsevalle lammelle ja illalla palataan suorinta tietä leirille. Mihin $x$-akselin pisteeseen leiri pystytetään, jotta päivän mittaan kuljettava matka olisi mahdollisimman lyhyt?

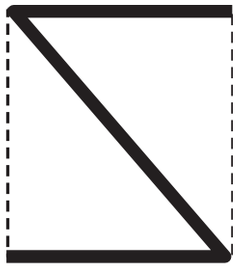
**101.** Vierekkäisten neliön muotoisten tonttien yhteenlaskettu pinta-ala on $4\,000\ \text{m}^2$. Tonttien ympärille ja väliin pystytetään aita. Määritä tonttien pinta-alat niin, että aidan kokonaispituus on mahdollisimman suuri.



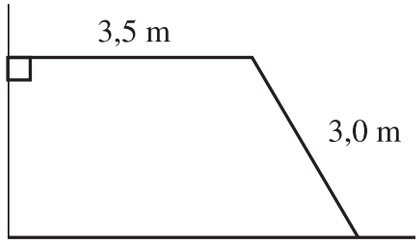
**102.** Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 1. Määritä kannan pituus niin, että kolmion pinta-ala on mahdollisimman suuri.

**103.** Tasakylkisen kolmion kolmeen sivuun on käytettävissä 6 metriä rimaa. Määritä kylkien ja kannan pituus niin, että kolmion pinta-ala on mahdollisimman suuri.

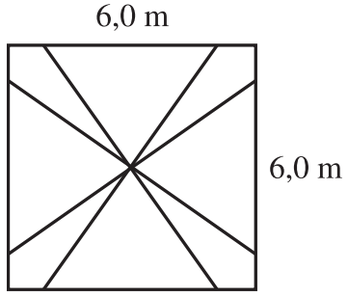
**104.** Teräsputkesta, jonka pituus on 3,00 metriä, taivutetaan Z-kirjaimen muotoinen kehikko. Kuinka pitkiin osiin putki tulee taivuttaa, jotta kehikon rajaaman suorakulmion pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?



**105.** Määritä seinää vasten rakennettavan katoksen leveys maan tasalla niin, että poikkileikkauksen pinta-ala (ja siis katoksen tilavuus) on mahdollisimman suuri.

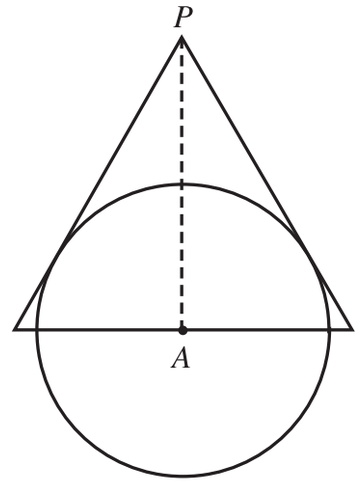



**106.** Kangas on muodoltaan neliö, jonka sivujen pituudet ovat 6,0 metriä. Neliön nurkista leikataan pois samanlaiset keskipisteeseen ulottuvat palat. Jäljelle jäävä kangas taitetaan säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoisen teltan katoksi. Määritä leikkauskohtien etäisyys nurkista niin, että teltan tilavuus on mahdollisimman suuri.




**107.** Kaksi suoraa metsäpolkua risteää kohtisuorasti. Polkujen risteystä lähestyvät toista polkua kulkeva eksynyt lapsi, jonka nopeus on 3,0 km/h, ja toista polkua kulkeva etsijä, jonka nopeus on 6,0 km/h. Molemmat ovat 1,0 km:n päässä polkujen risteyksestä. Kuinka pitkän ajan kuluttua heidän etäisyytensä on pienimmillään? Kuuleeko lapsi tällöin etsijän huhuilun? Ääni kantaa metsässä 300 metrin päähän.

**108.** Kuvion tasakylkistä kolmiota rajaavat pisteen $P$ kautta piirretyt ympyrän tangentit ja ympyrän keskipisteen $A$ kautta kulkeva, suoraa $PA$ vastaan kohtisuora suora. Ympyrän säde on 1. Määritä pisteen $P$ etäisyys keskipisteestä $A$ niin, että kolmion pinta-ala on mahdollisimman pieni.




**109.** Puoliympyrän säde on $R$. Puoliympyrän sisään on piirretty suorakulmio, jonka yksi sivu on puoliympyrän halkaisijalla ja vastakkaiset kärjet puoliympyrän kaarella. Mikä tällaisen suorakulmion suurin mahdollinen piiri on?

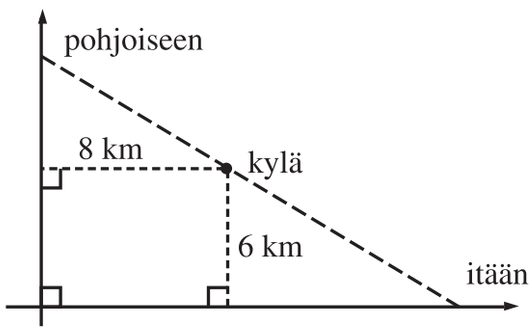
**110.** Mikä on $r$-säteisen ympyrän sisään piirretyn tasakylkisen kolmion suurin mahdollinen pinta-ala? Kuinka monta prosenttia pinta-ala on ympyrän pinta-alasta?

**111.** Säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoisen teltan tilavuudeksi on määrätty $8\ \text{m}^3$. Suunnittele teltan leveys ja korkeus niin, että teltan kattoon tarvitaan mahdollisimman vähän kangasta. Anna mitat senttimetrin tarkkuudella.

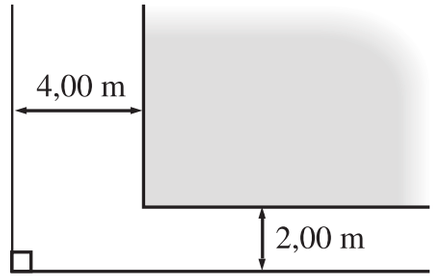
**112.** Suoran ympyräkartion muotoisen teltan kattoon on käytettävissä $30\ \text{m}^2$ kangasta. Määritä kartion korkeus ja pohjaympyrän säde niin, että kartion tilavuus on mahdollisimman suuri. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella. Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala on $A = \pi rs$, missä $r$ on pohjaympyrän säde ja $s$ kartion sivujana.

**113.** Pitkin suoraa $y = x$ kulkee polku. Muu koordinaatisto on metsää, jossa kulkunopeus on 60 % nopeudesta polulla. Mikä on nopein reitti origosta pisteeseen $(10, 2)$?

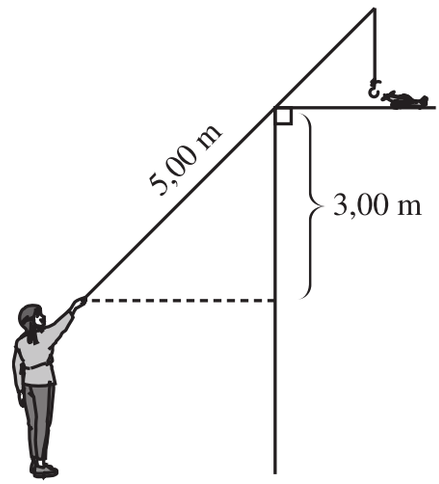
**114.** Kylän etäisyys toisesta kohtisuoraan risteävästä tiestä on 6,0 km ja toisesta 8,0 km. Kylän kautta suunnitellaan rakennettavaksi teitä yhdistävä suora yhteystie. Kuinka pitkä lyhin mahdollinen tie on? Missä kohdassa lyhin tie erkaantuu itään kulkevalta tieltä?




**115.** Kuinka pitkä ohut putki mahtuu vaakasuorassa asennossa käytävän mutkan läpi? Kuviossa ovat käytävät ylhäältä katsottuina. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.



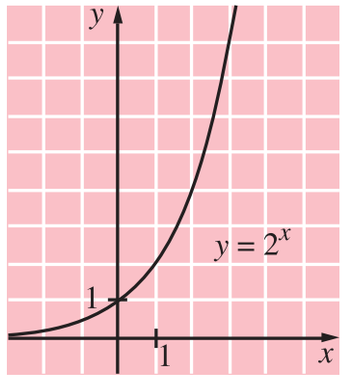

**116.** Kuinka etäällä katon reunasta lelu saa enintään olla, jotta sen saisi ongituksi pois katolta 5,00 metriä pitkällä vavalla, jonka toinen pää jää yrityksissä 3,00 metriä katon reunan alapuolelle?



# Logaritmi

**Ongelma**

a) Ilmaise luvut 8, 5, 1 ja $\frac{1}{16}$ luvun 2 potensseina. Voit käyttää apunasi eksponenttifunktion $2^x$ kuvaajaa.
b) Mitkä luvut voidaan ilmaista luvun 2 potensseina?




## JOHDANTOESIMERKKI 1

a) Ilmaise luvut 9, $\frac{1}{3}$ ja 6 luvun 3 potensseina.

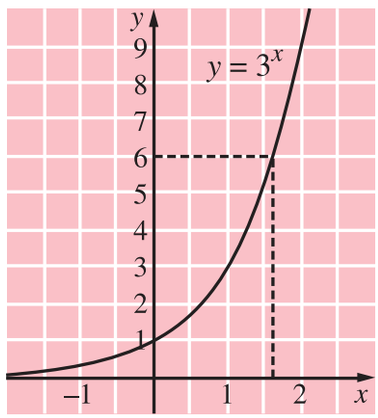
b) Mitkä luvut voidaan ilmaista luvun 3 potensseina?

**Ratkaisu**

a) Luku 9 on luvun 3 neliö: $9 = 3^2$.

Luku $\frac{1}{3}$ on luvun 3 käänteisluku: $\frac{1}{3} = 3^{-1}$.

Sellaista eksponentin $x$ arvoa, jolle $3^x = 6$, ei löydy päättelemällä. Eksponenttifunktion $3^x$ kuvaajan perusteella eksponentti on likimain 1,6.




Tarkistetaan laskimella:

$3^{1,6} \approx 5{,}80$ Pienempi kuin 6.
$3^{1,7} \approx 6{,}47$ Suurempi kuin 6.
$3^{1,65} \approx 6{,}13$ Suurempi kuin 6.

Eksponentin $x$ arvo, jolle $3^x = 6$, on välillä $]1{,}6;\ 1{,}65[$. Yhden desimaalin tarkkuudella $x \approx 1{,}6$.

b) Eksponenttifunktio $3^x$ saa kaikki positiiviset arvot. Jokainen positiivinen luku voidaan ilmaista luvun 3 potenssina.

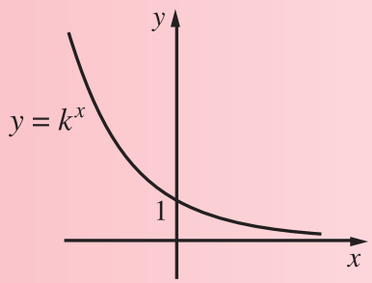
Eksponenttifunktio $3^x$ ei saa arvoa 0 eikä negatiivisia arvoja. Lukua 0 ja negatiivisia lukuja ei voida ilmaista luvun 3 potensseina.

**Vastaus**

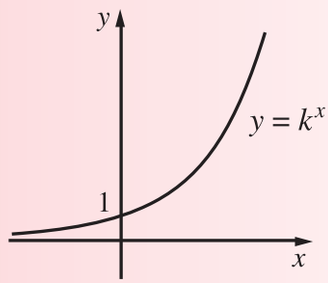
a) $9 = 3^2$, $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ ja $6 \approx 3^{1,6}$

b) Jokainen positiivinen luku voidaan ilmaista luvun 3 potenssina, lukua nolla ja negatiivisia lukuja ei voida.

Olkoon $k$ positiivinen luku, joka ei ole 1. Eksponenttifunktion $k^x$ arvojoukko on tällöin väli $]0, \infty[$, eli eksponenttifunktio $k^x$ saa kaikki positiiviset arvot.




$0 < k < 1$




$k > 1$

Siis eksponenttiyhtälöllä $k^x = a$ on ratkaisu $x$ aina, kun $a > 0$.

Toisin sanoen: Jokainen positiivinen luku $a$ voidaan ilmaista luvun $k$ potenssina.

### Logaritmin määritelmä

Olkoon $k$ positiivinen luku, joka ei ole 1 ($k > 0$ ja $k \neq 1$).
Olkoon $a$ positiivinen luku.

*Luvun $a$ $k$-kantainen logaritmi* on eksponenttiyhtälön $k^x = a$ ratkaisu.

Luvun $a$ $k$-kantainen logaritmi on siis eksponentin arvo, kun luku $a$ on ilmaistu kantaluvun $k$ potenssina.

Esimerkiksi luvun 9 3-kantainen logaritmi on 2, sillä $9 = 3^2$.
Johdantoesimerkin 1 nojalla luvun 6 3-kantainen logaritmi on yhden desimaalin tarkkuudella 1,6, sillä $6 \approx 3^{1,6}$.

Logaritmin määritelmän perusteella vain positiivisella luvulla $a$ on $k$-kantainen logaritmi.

## ESIMERKKI 2

Määritä luvun 5-kantainen logaritmi.

a) $5^9$ b) 125 c) 1 d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

**Ratkaisu**

a) Luku $5^9$ on luvun 5 potenssi. Eksponentin arvo on 9.
Luvun $5^9$ 5-kantainen logaritmi on 9.

b) Ilmaistaan luku 125 kantaluvun 5 potenssina.

$125 = 5^3$ Luvun 5-kantainen logaritmi on eksponentin arvo, kun luku on ilmaistu luvun 5 potenssina.

Luvun 125 5-kantainen logaritmi on 3.

c) Ilmaistaan luku 1 kantaluvun 5 potenssina.

$1 = 5^0$

Luvun 1 5-kantainen logaritmi on 0.

d) Ilmaistaan luku $\frac{1}{\sqrt{5}}$ kantaluvun 5 potenssina.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^{-\frac{1}{2}}$$

Luvun $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 5-kantainen logaritmi on $-\frac{1}{2}$.

**Vastaus** a) 9 b) 3 c) 0 d) $-\frac{1}{2}$

## ESIMERKKI 3

Mikä on luku, jonka 5-kantainen logaritmi on a) 6 b) $-3$?

**Ratkaisu**

a) Luku, jonka 5-kantainen logaritmi on 6, on

$5^6 = 15\,625$. Luvun $5^6$ 5-kantainen logaritmi on 6.

b) Luku, jonka 5-kantainen logaritmi on $-3$, on

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}.$$

**Vastaus** a) $5^6 = 15\,625$ b) $5^{-3} = \frac{1}{125}$

## Logaritmifunktio

Oletetaan, että kantaluku $k$ on positiivinen ja eri suuri kuin 1, eli $k > 0$ ja $k \neq 1$.

Luvun $x$ $k$-kantainen logaritmi merkitään $\log_k x$.

Luvun $x$ $k$-kantainen logaritmi on eksponentin arvo, kun luku $x$ on ilmaistu luvun $k$ potenssina.

$\log_k x = y$, kun $x = k^y$

Määritelmän mukaan on siis

$x = k^{\log_k x}$.

Kun kantaluvun $k$ eksponenttina on luvun $x$ $k$-kantainen logaritmi, potenssin arvo on $x$.

Jokainen positiivinen luku voidaan ilmaista luvun $k$ potenssina, eli jokaisella positiivisella luvulla on $k$-kantainen logaritmi. Koska positiivisen luvun $k$ kaikki potenssit ovat positiivisia, lukua 0 ja negatiivisia lukuja ei voida ilmaista luvun $k$ potensseina.

## Funktion $\log_k x$ määrittelyjoukko

Funktion $\log_k x$ määrittelyjoukko on $]0, \infty[$.

## ESIMERKKI 4

a) Määritä funktion $\log_2 x$ arvot $\log_2 2^9$, $\log_2 8$, $\log_2 1$ ja $\log_2 \frac{1}{2}$.
b) Piirrä funktion $\log_2 x$ kuvaaja.

### Ratkaisu

a) Merkintä $\log_2 x$ tarkoittaa luvun $x$ 2-kantaista logaritmia eli eksponentin arvoa silloin, kun luku $x$ on ilmaistu kantaluvun 2 potenssina.

$\log_2 2^9 = 9$

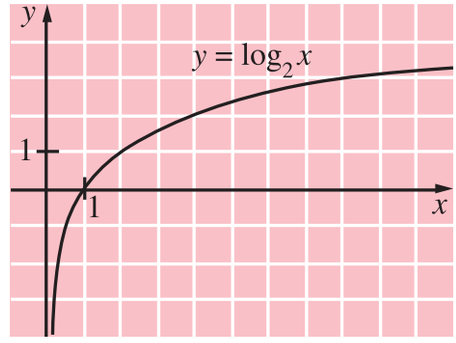
$\log_2 8 = 3$, sillä $8 = 2^3$.

$\log_2 1 = 0$, sillä $1 = 2^0$.

$\log_2 \frac{1}{2} = -1$, sillä $\frac{1}{2} = 2^{-1}$.

b) Lasketaan taulukkoon lisää funktion $\log_2 x$ arvoja ja merkitään vastaavat pisteet koordinaatistoon.*

| $x$ | $y = \log_2 x$ | Perustelu |
|---|---|---|
| 8 | 3 | $8 = 2^3$ |
| 4 | 2 | $4 = 2^2$ |
| 2 | 1 | $2 = 2^1$ |
| 1 | 0 | $1 = 2^0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $-1$ | $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ |
| $\frac{1}{4}$ | $-2$ | $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ |
| $\frac{1}{8}$ | $-3$ | $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ |




### Vastaus

a) $\log_2 2^9 = 9$, $\log_2 8 = 3$, $\log_2 1 = 0$ ja $\log_2 \frac{1}{2} = -1$

---

* Funktion $\log_2 x$ kuvaajaa ei voida suoraan piirtää graafisella laskimella. Funktio voidaan kuitenkin ilmaista 10-kantaisen logaritmifunktion avulla ja sen jälkeen piirtää graafisella laskimella (vrt. tehtävä 189).

## ESIMERKKI 5

Määritä $x$, kun a) $\log_7 x = -3$ b) $3 \log_2 x - 1 = 0$.

**Ratkaisu**

a) $\log_7 x = -3$

On määritettävä luku, jonka 7-kantainen logaritmi on $-3$.

$$x = 7^{-3} = \frac{1}{343}$$

b) $3 \log_2 x - 1 = 0$

Ratkaistaan ensin $\log_2 x$.

$3 \log_2 x = 1 \quad | : 3$

$$\log_2 x = \frac{1}{3}$$

$$x = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

**Vastaus**

a) $x = \frac{1}{343}$ b) $x = \sqrt[3]{2}$

## ESIMERKKI 6

a) Ilmaise luku 781 luvun 3 potenssina.

b) Laske $3^{\log_3 17}$.

**Ratkaisu**

a) Logaritmin määritelmän mukaan

$x = k^{\log_k x}$.

Kun kantaluvun $k$ eksponenttina on luvun $x$ $k$-kantainen logaritmi, potenssin arvo on $x$.

Siis

$781 = 3^{\log_3 781}$.

b) Kun kantaluvun 3 eksponenttina on luvun 17 3-kantainen logaritmi, potenssin arvo on 17.

$3^{\log_3 17} = 17.$ $\quad k^{\log_k x} = x$

**Vastaus**

a) $3^{\log_3 781}$ b) 17

### Kymmenkantainen logaritmi lg *x*

Luvun $x$ 10-kantaisella logaritmilla on oma merkintä $\lg x$.

$$\lg x = \log_{10} x$$

Kymmenkantaisia logaritmeja voi laskea laskimella.
Näppäin on yleensä log.

## ESIMERKKI 7

a) Laske kahden numeron tarkkuudella funktion $f(x) = 0{,}23 \lg x + 4{,}5$ arvo kohdassa $85\,000$.
b) Ratkaise kahden numeron tarkkuudella yhtälö $f(x) = 7{,}4$.

**Ratkaisu**

a) Funktio $f(x) = 0{,}23 \lg x + 4{,}5$ on määritelty, kun $x > 0$.

Sijoitetaan $x = 85\,000$.

$$f(85\,000) = 0{,}23 \lg 85\,000 + 4{,}5$$
$$\approx 5{,}6$$

$\lg 85\,000$ lasketaan näppäilemällä log 85000.

b) Ratkaistaan yhtälö $0{,}23 \lg x + 4{,}5 = 7{,}4$.

$$0{,}23 \lg x + 4{,}5 = 7{,}4 \quad | -4{,}5$$
$$0{,}23 \lg x = 2{,}9 \quad | : 0{,}23$$
$$\lg x = \frac{2{,}9}{0{,}23}$$
$$x = 10^{\frac{2{,}9}{0{,}23}} \approx 4{,}1 \cdot 10^{12}$$

Yhtälöstä ratkaistaan ensin $\lg x$.

Jos $\lg x = a$, niin $x = 10^a$.

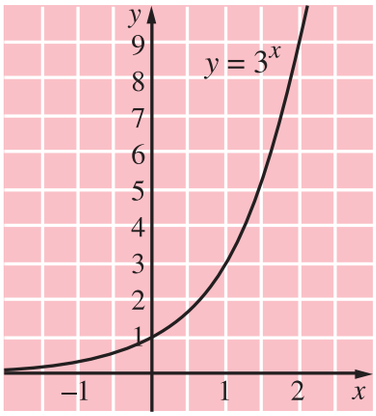
**Vastaus**

a) 5,6 b) $4{,}1 \cdot 10^{12}$

# TEHTÄVIÄ

## SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**117.** Määritä eksponenttifunktion $3^x$ kuvaajan avulla lukujen 7 ja 0,5 3-kantaiset logaritmit yhden desimaalin tarkkuudella. Tarkista laskimella.




**118.** Määritä luvun 7-kantainen logaritmi.

a) $7^{12}$ b) 49 c) 7

d) $\sqrt{7}$ e) 1 f) $\frac{1}{7}$

g) $\frac{1}{7^8}$

**119.** Mikä on luku, jonka 5-kantainen logaritmi on

a) 17 b) 4 c) 1

d) 0 e) $-1$ f) $-2$

g) $-13$?

**120.** a) Täydennä taulukko

| $x$ | $\log_3 x$ |
|---|---|
| 9 | |
| 3 | |
| $\sqrt{3}$ | |
| 1 | |
| $\frac{1}{3}$ | |
| $\frac{1}{9}$ | |

b) Piirrä funktion $\log_3 x$ kuvaaja.

**121.** Määritä.

a) $\log_2 2^{11}$ b) $\log_2 32$

c) $\log_2 \frac{1}{16}$ d) $\log_2 \frac{1}{2^{14}}$

**122.** Merkintä $\lg x$ tarkoittaa luvun $x$ 10-kantaista logaritmia, $\lg x = \log_{10} x$. Määritä.

a) $\lg 10^9$ b) $\lg 1\,000\,000$

c) $\lg 100$ d) $\lg 1$

e) $\lg 0{,}1$ f) $\lg 10^{-34}$

**123.** Olkoon $k > 0$ ja $k \neq 1$.

a) Määritä $\log_k k^7$, $\log_k k$, $\log_k 1$, $\log_k \frac{1}{k}$ ja $\log_k k^{-5}$.

b) Määritä luku, jonka $k$-kantainen logaritmi on 3, ja luku, jonka $k$-kantainen logaritmi on $-2$.

**124.** Määritä $x$, kun

a) $\log_7 x = 4$ b) $\log_7 x = 2$

c) $\log_7 x = 1$ d) $\log_7 x = 0$

e) $\log_7 x = -1$ f) $\log_7 x = -3$.

**125.** Ratkaise yhtälö.
a) $\log_5 x - 3 = 0$ b) $5 \log_5 x + 10 = 0$
c) $3 \log_5 x + 1 = 0$

**126.** Ilmaise luku 7 luvun a) 10 b) 5 potenssina.

**127.** Laske.
a) $3^{\log_3 6}$ b) $6^{\log_6 3}$

**128.** Määritä kantaluku $k$, kun tiedetään, että
a) $\log_k 16 = 2$ b) $\log_k 3 = \frac{1}{2}$.

**129.** a) Laske kahden numeron tarkkuudella funktion $f(x) = 0{,}17 \lg x + 2{,}1$ arvo kohdassa 0,089.
b) Määritä kahden numeron tarkkuudella funktion $f$ nollakohta.

**130.** Voimakkaissa maanjäristyksissä vapautuu lyhyessä ajassa suuri määrä maankuoren jännitteisiin patoutunutta energiaa. Maanjäristyksen voimakkuutta ei kuitenkaan ilmaista vapautuneen energian määrällä, vaan maankuoren värähtelyä mittaavalla *richterasteikolla.* Maanjäristyksen voimakkuuden $M$ richtereinä liittää vapautuneen energian määrään $E$ kaava $M = 3{,}2 + 0{,}67 \lg E$. Energian yksikkönä on megawattitunti (MWh).*
a) Tammikuussa 1994 tapahtui Los Angelesissa maanjäristys, jonka voimakkuus oli 6,1 richteriä. Laske järistyksessä vapautuneen energian määrä. Loviisan ydinvoimalaitos tuottaa tunnissa 880 MWh energiaa. Kuinka monessa tunnissa ydinvoimalaitos tuottaa saman energiamäärän, joka vapautui Los Angelesissa muutamassa sekunnissa?

* Tämä likimääräinen kaava on laadittu havaintojen ja geofysikaalisten mallien pohjalta.

b) Tapaninpäivänä vuonna 2004 tapahtui Sumatran läheisyydessä merenalainen maanjäristys, jonka voimakkuus oli 9,0 richteriä. Kuinka moninkertainen Sumatran järistyksessä vapautuneen energian määrä oli verrattuna Los Angelesin maanjäristykseen vuonna 1994?

**131.** Kun metrin korkeudelta hypännyt 70 kilogramman painoinen henkilö tömähtää maahan, maankuoren täräyttämiseen vapautuu energiaa noin 0,15 Wh (osa energiasta vapautuu lämpönä).
a) Mikä on maan tärähdyksen voimakkuus richterasteikolla? Käytä hyväksi edellisen tehtävän tietoja (1 MWh = $10^6$ Wh).
b) Kuinka voimakkaasti maa tärähtää, jos 70 kg:n painoisia hyppääjiä on jalkapallokatsomon verran eli 75 000?
c) Kuinka monen 70-kiloisen henkilön pitäisi hypätä yhtä aikaa, jotta tärähdyksen voimakkuus olisi 6,1 richteriä (Los Angelesin maanjäristys 1994)?

## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**132.** Määritä luvun 6-kantainen logaritmi.
a) $6^7$ b) 216 c) 6
d) 1 e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{36}$
g) $\frac{1}{6^9}$

**133.** Määritä luku, jonka 6-kantainen logaritmi on a) 5 b) –4.

**134.** a) Määritä lukujen $\sqrt{7}$, $7\sqrt{7}$ ja $\frac{1}{\sqrt{7}}$ 7-kantaiset logaritmit.
b) Minkä luvun 7-kantainen logaritmi on $\frac{1}{3}$?

**135.** Määritä funktion $\log_5 x$ arvo muuttujan $x$ arvolla

a) $5^{14}$ b) 625 c) 25

d) 5 e) $\sqrt{5}$ f) 1

g) $\frac{1}{125}$ h) $\frac{1}{5^{10}}$.

**136.** Määritä $x$, kun

a) $\log_6 x = 3$ b) $\log_6 x = 1$

c) $\log_6 x = 0$ d) $\log_6 x = -1$

e) $\log_6 x = -\frac{3}{2}$ f) $\log_6 x = -2$.

**137.** Merkintä $\lg x$ tarkoittaa luvun $x$ 10-kantaista logaritmia, $\lg x = \log_{10} x$.

a) Määritä $\lg 10^9$, $\lg 100\,000$, $\lg 10$, $\lg 1$ ja $\lg 0{,}001$.

b) Ratkaise yhtälöt $\lg x = 4$ ja $\lg x = -2$.

**138.** Ratkaise yhtälö.

a) $\log_4 x = 5$ b) $\log_3 x - 9 = 0$

c) $2 \log_2 x + 14 = 0$

**139.** Ilmaise luku 5 luvun

a) 10 b) 3 potenssina.

**140.** Laske.

a) $3^{\log_3 9}$ b) $3^{\log_3 7}$ c) $5^{-\log_5 9}$

**141.** Määritä kantaluku $k$, kun

a) $\log_k 216 = 3$ b) $\log_k 4\,096 = 6$.

**142.** Määritä.

a) $\log_5 5^9$ b) $\log_5 (5^9)^3$

c) $\log_5 (5^9)^8$

**143.** Määritä.

a) $\log_5 5^{12}$ b) $\log_5 5^4$

c) $\log_5 (5^{12} \cdot 5^4)$ d) $\log_5 \frac{5^{12}}{5^4}$

**144.** Valokuvausfilmin herkkyys ilmaistaan kahdella asteikolla. Tyypillinen filmin herkkyyslukema on ISO 125/22°. Ensimmäinen luku 125 on filmin herkkyys fysikaalisella mitta-asteikolla (yksikkönä 1/luksisekunti), ja jälkimmäinen luku 22° filmin herkkyys logaritmisella asteikolla.* Logaritmisen asteikon lukema $S°$ saadaan fysikaalisesta lukemasta $S$ kaavalla $S° = 1 + 10 \lg S$.

Täydennä herkkyyskuvaukset.

a) ISO 400/– ja ISO 2000/–

b) ISO –/17° ja ISO –/36°

**145.** Äänen voimakkuuden fysikaalinen yksikkö on *intensiteetti*: äänen teho pinta-alaa kohden. Intensiteetin yksikkö on $\mathrm{W/m^2}$ (wattia neliömetriä kohti). Intensiteetti vaihtelee huomattavasti: kuiskauksen intensiteetti on noin $10^{-9}\ \mathrm{W/m^2}$, pölynimurin $10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$ ja kivipora $0{,}1\ \mathrm{W/m^2} = 10^{-1}\ \mathrm{W/m^2}$. Mittalukujen suhteet eivät kuitenkaan vastaa kuulohavaintoa, sillä ihmisen aistit tasoittavat ärsykkeiden fysikaalisesti mitattuja suuruussuhteita.** Äänen voimakkuus ilmaistaankin tavallisesti kuulohavaintoa paremmin vastaavana *melutasona*, joka määritellään kaavalla $L = 120 + 10 \lg I$, missä $I$ on äänen intensiteetti. Melutason $L$ yksikkö on *desibeli* (lyhenne dB).

Mikä melutaso on, kun äänen intensiteetti on

a) $10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$ (pölynimuri)

b) $0{,}1\ \mathrm{W/m^2}$ (kivipora)

c) $100\ \mathrm{W/m^2}$ (lentokoneen suihkumoottori läheltä kuunneltuna)?

---

* Lyhenne ISO ilmaisee, että kyseessä ovat kansainvälisen standardijärjestön (International Standardization Organization) vahvistamat asteikot.

** Pölynimurin äänen intensiteetti on tuhatkertainen kuiskaukseen verrattuna ja kiviporan äänen intensiteetti 100 000-kertainen pölynimuriin verrattuna. Suhteet eivät päde koetulle kuuloaistimukselle.

**146.** a) Melutason yksikkö on laadittu niin, että kuulokynnys (pienin melutaso, jonka ihmiskorva kuulee) on noin 0 dB. Mikä on tätä vastaava äänen intensiteetti? Tarvittavat tiedot ovat edellisessä tehtävässä.

b) Koira pystyy kuulemaan ääniä, joiden intensiteetti on $10^{-14}$ W/m$^2$. Mikä vastaava melutaso on?

c) Lentokentän ympäristön ns. lentomelualue on alue, jolle kantautuvan nousevien ja laskeutuvien koneiden äänen melutaso on yli 55 desibeliä. Mikä tätä rajaa vastaava äänen intensiteetti on?

**147.** Äänen intensiteetti (yksikkönä W/m$^2$) on kohtuullisilla etäisyyksillä likimain kääntäen verrannollinen äänenlähteestä mitatun etäisyyden neliöön. Nousevan suihkukoneen äänen melutaso 30 m:n etäisyydellä on 140 dB. Kuinka kaukana koneesta ääni kuuluu rock-konsertin voimakkuudella (120 dB)?

# Logaritmikaavat

**Ongelma**

Lukujen $78\,125$ ja $625$ 5-kantaiset logaritmit ovat $7$ ja $4$, sillä $78\,125 = 5^7$ ja $625 = 5^4$. Määritä seuraavien lukujen 5-kantainen logaritmi.

a) potenssi $78\,125^3$ b) tulo $78\,125 \cdot 625$

c) osamäärä $\dfrac{78\,125}{625}$

Luvun $k$-kantainen logaritmi on eksponentin arvo, kun luku on ilmaistu $k$:n potenssina. Kun kantaluvun $k$ potensseihin sovelletaan potenssikaavoja $(k^r)^s = k^{rs}$, $k^r \cdot k^s = k^{r+s}$ ja $\dfrac{k^r}{k^s} = k^{r-s}$, saadaan jokaista näitä kaavaa vastaava logaritmikaava.

Seuraava kaava perustuu potenssin potenssin kaavaan $(k^r)^s = k^{rs}$. Kaava pätee, kun $a > 0$.

### Potenssin logaritmikaava

$$\log_k a^s = s \cdot \log_k a$$

Kaavan mukaan potenssin $a^s$ logaritmi on luvun $a$ logaritmi kerrottuna eksponentilla $s$.

**Kaavan perustelu.** Oletetaan, että luvun $a$ $k$-kantainen logaritmi on $r$ eli

$\log_k a = r$.

Logaritmin määritelmän mukaan on siis

$a = k^r$.

Tällöin

$a^s = (k^r)^s = k^{rs}$.

Siis luvun $a^s$ $k$-kantainen logaritmi on $rs$. Toisin sanoen

$\log_k a^s = s \cdot \log_k a$. □

Vastaavasti samankantaisten potenssien tulon kaava $k^r \cdot k^s = k^{r+s}$ johtaa tulon logaritmikaavaan ja samankantaisten potenssien osamäärän kaava $\frac{k^r}{k^s} = k^{r-s}$ osamäärän logaritmikaavaan.

Oletetaan, että $a > 0$ ja $b > 0$. Tällöin pätevät seuraavat kaavat.

### Tulon logaritmikaava

$$\log_k ab = \log_k a + \log_k b$$

Kahden positiivisen luvun tulon logaritmi on lukujen logaritmien summa.

### Osamäärän logaritmikaava

$$\log_k \frac{a}{b} = \log_k a - \log_k b$$

Kahden positiivisen luvun osamäärän logaritmi on jaettavan logaritmin ja jakajan logaritmin erotus.

**Tulon logaritmikaavan perustelu.** Oletetaan, että luvun $a$ $k$-kantainen logaritmi on $r$ ja luvun $b$ $k$-kantainen logaritmi on $s$ eli

$\log_k a = r$ ja $\log_k b = s$.

Logaritmin määritelmän mukaan

$a = k^r$ ja $b = k^s$.

Tällöin

$ab = k^r \cdot k^s = k^{r+s}$.

Siis luvun $ab$ $k$-kantainen logaritmi on $r + s$. Toisin sanoen

$\log_k ab = \log_k a + \log_k b$. □

Osamäärän logaritmikaavan perusteleminen on tehtävänä 158.

## ESIMERKKI 1

Määritä $\log_3 12 - \log_3 8 + \log_3 6$.

**Ratkaisu** Käytetään summan ja osamäärän logaritmikaavoja toiseen suuntaan.

$\log_3 12 - \log_3 8 + \log_3 6$ $\qquad \log_k a - \log_k b = \log_k \frac{a}{b}$

$= \log_3 \frac{12}{8} + \log_3 6$ $\qquad \log_k a + \log_k b = \log_k ab$

$= \log_3 \left( \frac{12}{8} \cdot 6 \right) = \log_3 9 = 2$

**Vastaus** 2

## ESIMERKKI 2

Millä muuttujan arvoilla funktio $\lg(x + 8) + \lg(5x - 10)$ saa arvon 3?

**Ratkaisu**

Selvitetään ensin funktion $\lg(x + 8) + \lg(5x - 10)$ määrittelyjoukko.

Funktio $\lg(x + 8)$ on määritelty, kun

$$x + 8 > 0$$
$$x > -8.$$

Funktio $\lg(5x - 10)$ on määritelty, kun

$$5x - 10 > 0$$
$$x > 2.$$

Molemmat funktiot $\lg(x + 8)$ ja $\lg(5x - 10)$ ovat määritellyt, kun $x > 2$. Funktion $\lg(x + 8) + \lg(5x - 10)$ määrittelyjoukko on $]2, \infty[$.

Yhtälön $\lg(x + 8) + \lg(5x - 10) = 3$ ratkaisemiseksi yhtälö saatetaan logaritmikaavojen ja logaritmin määritelmän avulla muotoon $\lg u = \lg v$.

| | |
|---|---|
| $\lg(x + 8) + \lg(5x - 10) = 3$ | Tulon logaritmikaava $\lg a + \lg b = \lg ab$. |
| $\lg((x + 8)(5x - 10)) = 3$ | Luku 3 on luvun $10^3$ 10-kantainen logaritmi, $3 = \lg 10^3$. |
| $\lg((x + 8)(5x - 10)) = \lg 10^3$ | $\lg u = \lg v$, jos ja vain jos $u = v$. |
| $(x + 8)(5x - 10) = 10^3$ | |
| $5x^2 + 30x - 80 = 1000$ | |
| $5x^2 + 30x - 1080 = 0$ | $\mid : 5$ |
| $x^2 + 6x - 216 = 0$ | |

Ratkaisukaavalla: $x = 12$ tai $x = -18$.

Luku 12 kuuluu funktion $\lg(x + 8) + \lg(5x - 10)$ määrittelyjoukkoon $]2, \infty[$. Funktio $\lg(x + 8) + \lg(5x - 10)$ saa arvon 3 muuttujan arvolla 12.

**Vastaus**

arvolla 12

# TEHTÄVIÄ

## SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**148.** Määritä.

a) $\log_6 60 - \log_6 5 + \log_6 3$

b) $2\log_5 10 - \log_5 4$

**149.** Määritä $\log_2 (5 + \sqrt{17}) + \log_2 (5 - \sqrt{17})$.

**150.** Ilmaise luvun $a$ $k$-kantaisen logaritmin $\log_k a$ avulla

a) $\log_k a^3$ b) $\log_k \sqrt{a}$

c) $\log_k \frac{1}{a}$ d) $\log_k \frac{1}{a^3}$.

**151.** Kahden positiivisen luvun $a$ ja $b$ geometrinen keskiarvo on lukujen tulon neliöjuuri. Osoita, että geometrisen keskiarvon logaritmi on yhtä suuri kuin lukujen $a$ ja $b$ logaritmien tavallinen (aritmeettinen) keskiarvo.

**152.** Ratkaise yhtälö

$\log_3 (x - 1) + \log_3 (x - 3) = 1$.

**153.** Ratkaise yhtälö

$\log_2 (x - 1) + \log_2 (x - 7) = 4$.

**154.** Määritä funktion $\lg x + \lg (x - 21) - 2$ nollakohdat.

**155.** Ratkaise yhtälö

$2\log_2 (x + 1) = \log_2 (x + 5) + 1$.

**156.** Ratkaise yhtälö

a) $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3$.

b) Ratkaise yhtälö $\log_2 (x^2 - 1) = 3$.

c) Tulon logaritmikaavan mukaan

$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = \log_2 (x^2 - 1)$.

Onko funktio $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1)$ sama funktio kuin $\log_2 (x^2 - 1)$?

**157.** Ratkaise yhtälö

$\lg(x - 1) + \lg(x - 2) + \lg(x + 3) = \lg 6$.

**158.** Perustele osamäärän logaritmikaava

$\log_k \frac{a}{b} = \log_k a - \log_k b$.

## SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**159.** Määritä.

a) $\log_3 15 - \log_3 10 + \log_3 2$

b) $\log_3 2 - \frac{1}{2}\log_3 36$

**160.** Sievennä lauseke. Merkintä log tarkoittaa, että logaritmin kantalukuna voi olla mikä tahansa luku $k$ ($k > 0$ ja $k \neq 1$).

a) $\log \frac{x^2}{y} - 2\log x$

b) $\log \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2}\log y$

**161.** Osoita, että

$\log (\sqrt{a+1} + \sqrt{a}) + \log (\sqrt{a+1} - \sqrt{a}) = 0$

kaikilla $a \geqslant 0$.

**162.** Ilmaise luvun $a$ 10-kantaisen logaritmin $\lg a$ avulla

a) $\lg a^4$ b) $\lg \sqrt[3]{a}$

c) $\lg \frac{1}{\sqrt{a}}$ d) $\lg \frac{1}{a^5}$.

**163.** Millä muuttujan arvolla funktion $\log_2 x + \log_2 (x - 3)$ arvo on 2?

**164.** Ratkaise yhtälö $\lg(-x) + \lg(1 - 2x) = 1$.

**165.** Lukujen $x + 7$ ja $x - 5$ 2-kantaisten logaritmien keskiarvo on 3. Määritä luku $x$.

**166.** Ratkaise yhtälö $2 \lg 2x - \lg(x + 5) = 1$.

**167.** Ratkaise yhtälö

$\frac{1}{2} \log_3 (8 - x) = \log_3 (x + 2) + 1$.

**168.** Osoita, että

$2 \log_2 (\sqrt{3} - 1) = \log_2 (2 - \sqrt{3}) + 1$.

**169.** Jos $x = 9^y$, niin silloin $x = (3^2)^y = 3^{2y}$. Tulkitse $y$ ja $2y$ logaritmeiksi ja ilmaise funktio $\log_3 x$ funktion $\log_9 x$ avulla.

**170.** Olkoon $k > 0$ ja $k \neq 1$. Osoita, että

a) $\log_{\frac{1}{k}} = -\log_k x$

b) $\log_{k^2} x = \frac{1}{2} \log_k x$.

c) Ilmaise funktio $\log_{k^r} x$, missä $r \neq 0$, funktion $\log_k x$ avulla.

**171.** a) Osoita, että $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

b) Käytä hyväksi a-kohdan kaavaa ja ilmaise funktio $\log_b x$ funktion $\log_a x$ avulla. Sovella kaavaa tapaukseen $b = 2$ ja $a = 10$.

**172.** Oletetaan, että $k > 0$ ja $k \neq 1$ ja että $a > 0$ ja $a \neq \frac{1}{k}$. Osoita, että

$$\log_{ak} x = \frac{\log_k x}{1 + \log_k a}.$$

# Logaritmin sovelluksia

**Ongelma**

a) Määritä kokonaisluvun $5^{1761}$ 10-kantainen logaritmi.
b) Ilmaise luku $5^{1761}$ luvun 10 potenssina.
c) Kuinka monta numeroa kokonaisluvussa $5^{1761}$ on?

Suuria lukuja voi tutkia 10-kantaisen logaritmin avulla.

**ESIMERKKI 1**

a) Kumpi luvuista $2^{4151}$ ja $3^{2621}$ on suurempi?
b) Kuinka monta numeroa suuremmassa luvussa on?

**Ratkaisu**

a) Potenssien arvot ovat niin suuret, että niitä ei suoraan voi laskea laskimella.
Lasketaan lukujen 10-kantaiset logaritmit.

$$\lg 2^{4151} = 4151 \cdot \lg 2 \qquad \text{Potenssin logaritmikaava } \lg a^s = s \lg a.$$
$$\approx 1249{,}6$$

ja

$$\lg 3^{2621} = 2621 \cdot \lg 3 \approx 1250{,}5$$

Luvun $3^{2621}$ 10-kantainen logaritmi on suurempi kuin luvun $2^{4151}$.
Koska 10-kantaisen logaritmifunktion $\lg x$ arvot suurenevat muuttujan $x$ arvojen suuretessa (funktio $\lg x$ on aidosti kasvava), niin luku $3^{2621}$ on suurempi kuin $2^{4151}$.

b) Ilmaistaan luku $3^{2621}$ likimääräisesti luvun 10 potenssina.

Koska

$\lg 3^{2621} \approx 1250{,}5,$

niin

$3^{2621} \approx 10^{1250{,}5}.$ Jos $\lg x = s$, niin $x = 10^s$.

Siis $10^{1250} < 3^{2621} < 10^{1251}$, joten kokonaisluvussa $3^{2621}$ on yhtä monta numeroa kuin luvussa $10^{1250}$ eli 1 251 numeroa.

**Vastaus** a) $3^{2621}$ b) 1 251 numeroa

## ESIMERKKI 2

Määritä yhtälön $3^x = 5$ ratkaisu kolmen numeron tarkkuudella.

**Ratkaisu** Yhtälö voidaan ratkaista likimääräisesti käyttämällä 10-kantaista logaritmia ja potenssin logaritmikaavaa.

$3^x = 5$ Vasemman ja oikean puolen 10-kantaiset logaritmit ovat yhtä suuret.

$\lg 3^x = \lg 5$ Potenssin logaritmikaava $\lg a^s = s \lg a$.

$x \cdot \lg 3 = \lg 5 \quad | : \lg 3$ Ratkaistaan $x$.

$x = \dfrac{\lg 5}{\lg 3} \approx 1{,}46$ Laskimella.

**Vastaus** 1,46

**ESIMERKKI 3**

Määritä $\log_3 5$ kolmen numeron tarkkuudella.

**Ratkaisu**

Luvun 5 3-kantainen logaritmi $\log_3 5$ on yhtälön $3^x = 5$ ratkaisu.

Edellisen esimerkin mukaan $x = \dfrac{\lg 5}{\lg 3} \approx 1{,}46$. Siis $\log_3 5 \approx 1{,}46$.

**Vastaus**

1,46

### Eksponenttiyhtälön $k^x = a$ ratkaiseminen

Eksponenttiyhtälö $k^x = a$ voidaan ratkaista merkitsemällä yhtälön molempien puolien 10-kantaiset logaritmit yhtä suuriksi ja käyttämällä potenssin logaritmin kaavaa.*

Yhtälössä tulee olla $k > 0$ ja $k \neq 1$ sekä $a > 0$.

$$k^x = a$$

$$\lg k^x = \lg a \qquad \text{Potenssin logaritmikaava.}$$

$$x \cdot \lg k = \lg a \qquad \mid : \lg k$$

$$x = \frac{\lg a}{\lg k}$$

Koska eksponenttiyhtälön $k^x = a$ ratkaisu on luvun $a$ $k$-kantainen logaritmi $\log_k a$, tulos voidaan ilmaista myös muodossa

$$\log_k a = \frac{\lg a}{\lg k}.$$

---

* Voidaan myös käyttää toista laskimessa olevaa logaritmia ln $x$, johon perehdytään seuraavassa luvussa.

## ESIMERKKI 4

Pankkitilille, jonka vuotuinen korko lähdeveron* vähentämisen jälkeen on 1,62 %, talletetaan 4 000 euroa. Kuinka monen vuoden kuluttua talletuksen arvo ylittää 6 000 euroa?

**Ratkaisu**

Talletuksen arvo suurenee joka vuosi 1,62 %, eli pääoma tulee 1,0162-kertaiseksi. Talletuksen arvo $x$ vuoden kuluttua on $1{,}0162^x \cdot 4\,000$ euroa. Arvon tulee olla suurempi kuin 6 000 euroa.

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$1{,}0162^x \cdot 4000 > 6000 \quad \big| : 4000$$

$$1{,}0162^x > 1{,}5$$

$$\lg 1{,}0162^x > \lg 1{,}5$$

Potenssin logaritmikaava $\lg a^r = r \lg a$.

$$x \cdot \lg 1{,}0162 > \lg 1{,}5 \quad \big| : \lg 1{,}0162 \approx 0{,}007 > 0$$

Epäyhtälön suunta säilyy.

$$x > \frac{\lg 1{,}5}{\lg 1{,}0162} \approx 25{,}23$$

Tulos pyöristetään seuraavaan kokonaiseen vuoteen. Talletuksen arvo ylittää 6 000 euroa 26 vuoden kuluttua.

**Vastaus**

26 vuoden kuluttua

---

* Talletuksen korosta maksetaan valtiolle 28 %:n lähdevero. Jos esimerkiksi pankkitilin korko on 2,25 %, niin tallettajan saama todellinen korko on 1,62 % pääomasta, sillä $0{,}72 \cdot 0{,}0225a = 0{,}0162a$, missä $a$ on tilin pääoma.

## ESIMERKKI 5

Rengastetuista kanahaukoista tavataan myöhemmin 15 %. Kuinka monta kanahaukkaa tulee rengastaa, jotta todennäköisyys, että ainakin yksi haukka tavataan myöhemmin, olisi suurempi kuin 0,99? Oletetaan, että eri rengastetut kanahaukat tavataan toisistaan riippumatta.

### Ratkaisu

Tapahtuma ”ainakin yksi haukka tavataan” on tapahtuman ”yhtään ei tavata” vastatapahtuma.

Rengastetaan $n$ kanahaukkaa. Todennäköisyys, että yksittäistä haukkaa ei tavata, on 0,85. Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön nojalla todennäköisyys, että $n$:stä rengastetusta haukasta yhtään ei tavata, on $0{,}85^n$.

Siis

$$\text{P(ainakin yksi tavataan)} = 1 - \text{P(yhtään ei tavata)} = 1 - 0{,}85^n.$$

Ratkaistaan, kuinka suuri luvun $n$ tulee olla, jotta todennäköisyys olisi suurempi kuin 0,99.

$$\begin{aligned}
1 - 0{,}85^n &> 0{,}99 \\
-0{,}85^n &> -0{,}01 \qquad \big| \cdot (-1) \\
0{,}85^n &< 0{,}01 \\
\lg 0{,}85^n &< \lg 0{,}01 \qquad \text{Potenssin logaritmikaava.} \\
n \lg 0{,}85 &< \lg 0{,}01 \qquad \big| : \lg 0{,}85 \approx -0{,}07 < 0 \qquad \text{Epäyhtälön suunta vaihtuu.}
\end{aligned}$$

$$n > \frac{\lg\ 0{,}01}{\lg\ 0{,}85} \approx 28{,}3$$

Tulee siis rengastaa vähintään 29 kanahaukkaa.

### Vastaus

vähintään 29

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**173.** Kumpi luvuista $6^{3002}$ ja $3^{4903}$ on suurempi?

**174.** Kuinka monta numeroa kokonaisluvussa $4^{2000}$ on?

**175.** Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.

a) $3^x = 6$ b) $0{,}7^x = 0{,}02$

c) $1{,}9^x = -0{,}1$

**176.** Määritä neljän numeron tarkkuudella.

a) $\log_2 9$ b) $\log_5 0{,}35$

**177.** Pankkitilille, jonka vuotuinen korko lähdeveron vähentämisen jälkeen on 1,80 %, talletetaan 5 000 euroa. Kuinka monen vuoden kuluttua talletuksen arvo ylittää 8 000 euroa?

**178.** Paraguayn väkiluku vuoden 1998 alussa oli 5,2 miljoonaa ja väkiluku kasvoi vuosittain 3,0 %. Jos kasvu on jatkunut ja jatkuu samanlaisena, niin minä vuonna Paraguayn väkiluku ylittää 10 miljoonan rajan?

**179.** Jos liikenneonnettomuuksissa loukkaantuneiden lukumäärää onnistuttaisiin joka vuosi vähentämään 5 %, niin kuinka monessa vuodessa loukkaantuneiden määrä vähenisi alle puoleen nykyisestä?

**180.** Radioaktiivisen cesium-137:n määrä pienenee radioaktiivisen hajoamisen seurauksena 2,3 % vuodessa. Voimalaonnettomuuden saastuttamalla alueella aineen määrä ylittää kymmenkertaisesti turvallisuusrajan. Kuinka monen vuoden kuluttua aineen määrä on sallituissa rajoissa?

**181.** Yrityksen kasvutavoitteeksi asetetaan liikevaihdon kasvattaminen 50 % kuudessa vuodessa.

a) Mikä tulee asettaa vuosittaiseksi kasvutavoitteeksi?

b) Jos kasvuvauhti pysyy samana, niin kuinka monessa vuodessa liikevaihto kaksinkertaistuu?

**182.** Suomalaisista 1,2 % kuuluu veriryhmään AB– (pääveriryhmä AB ja reesusnegatiivinen). Kuinka suuri satunnaisesti valitun suomalaisryhmän tulee olla, jotta todennäköisyys, että mukana on ainakin yksi veriryhmään AB– kuuluva verenluovuttaja, olisi suurempi kuin 0,99?

**183.** Arkipäivän maantieliikenteessä noin kaksi kuljettajaa tuhannesta ajaa alkoholin vaikutuksen alaisena. Kuinka monta kuljettajaa poliisin tulee puhalluttaa, jotta todennäköisyys, että ainakin yksi rattijuoppo saadaan kiinni, olisi suurempi kuin 0,90?

**184.** Ratkaise yhtälö $4 \cdot 18^x = 6 \cdot 9^x$ kahden numeron tarkkuudella.

## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**185.** Mikä lukujen $5^{2239}$, $7^{1851}$ ja $10^{1565}$ suuruusjärjestys on?

**186.** Kuinka monta numeroa kokonaisluvussa $5^{5^5}$ on?

**187.** Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.

a) $1{,}4^x \cdot 150 = 750$

b) $0{,}87^x \cdot 12 = 1{,}5$

**188.** Määritä neljän numeron tarkkuudella

a) luvun 5 2-kantainen logaritmi

b) luvun 0,03 3-kantainen logaritmi.

**189.** Ilmaise funktio $\log_2 x$ funktion $\lg x$ avulla ja piirrä funktion $\log_2 x$ kuvaaja graafisella laskimella.

**190.** Mikä on ensimmäinen luvun 3 kokonaislukupotenssi, jonka arvo ylittää kymmenen miljoonaa? Mikä on ensimmäinen potenssi, jolle ei saa likiarvoa uuden graafisen laskimen potenssinäppäimellä eli jonka arvo on vähintään $10^{1000}$?

**191.** Jos vanhusten hoitopaikkojen lukumäärää lisätään vuosittain 3 %, niin kuinka monen vuoden kuluttua hoitopaikkojen määrä on yli 50 % suurempi kuin nyt?

**192.** Missä ajassa radioaktiivisen aineen määrä vähenee puoleen, jos aineesta hajoaa

a) 2,0 % vuorokaudessa

b) 0,0030 % vuodessa?

**193.** Järveen on levinnyt ympäristömyrkkyä määrä, joka ylittää turvallisen rajan 20-kertaisesti. Myrkky on sekoittunut veteen tasaisesti. Järven vedestä vaihtuu viikossa 15 %. Kuinka monessa viikossa vesi tulee käyttökelpoiseksi?

**194.** Vuoden 1997 alussa Afrikan väkiluku oli 758 miljoonaa ja vuoden 2004 alussa 885 miljoonaa. Minä vuonna Afrikan väkiluku ylittää miljardin rajan, jos vuotuinen kasvuprosentti pysyy samana?

**195.** Rengastetuista pajulinnuista tavataan myöhemmin noin 0,1 %. Kuinka monta pajulintua tulee rengastaa, jotta todennäköisyys, että ainakin yksi lintu tavataan, olisi suurempi kuin 0,99? Oletetaan, että rengastetut pajulinnut tavataan toisistaan riippumatta.

**196.** Kahta noppaa heitetään. Kuinka pitkä heittosarjan tulee olla, jotta kannattaisi lyödä vetoa sen puolesta, että ainakin kerran tulee kaksi kuutosta? Vedonlyönti tapahtuman puolesta on (ainakin pitkän päälle) kannattavaa, jos tapahtuman todennäköisyys on suurempi kuin 0,5.

**197.** Kun Intian väkiluku keväällä 2000 ylitti miljardin, Intiasta tuli Kiinan seuraksi toinen miljardikerhon valtio. Kiinan väkiluku samaan aikaan oli 1,27 miljardia. Jos maiden väestönkasvuprosentit (Intia 2,2 % ja Kiina 1,1 %) pysyvät ennallaan, niin milloin Intian väkiluku ylittää Kiinan väkiluvun?

**198.** Radioaktiivisen aineen hajoamisnopeus ilmaistaan tavallisesti *puoliintumisaikana*. Puoliintumisaika on aika, jossa puolet aineesta hajoaa muiksi aineiksi. Strontiumin isotoopin 90 puoliintumisaika on 29,5 vuotta. Eräälle Tyynenmeren saarelle levisi ydinkokeen yhteydessä radioaktiivista strontium-90:ä. Strontiumpitoisuus saarella on noin satakertainen turvalliseen määrään verrattuna. Kuinka monen vuoden kuluttua saarella voidaan taas asua?

**199.** Aineenvaihdunnan takia kaikki eliöt (kasvit ja eläimet) sisältävät samassa suhteessa kuin ilmakehä hiilen eri isotooppeja. Eliön kuoltua radioaktiivisen isotoopin, hiili-14:n, määrä alkaa vähetä niin, että aineen puoliintumisaika on 5 568 vuotta. Jäännösten radiohiilipitoisuutta käytetään arkeologiassa iän määrittämiseen.
a) Siperian tundralta löydetyn mammutin luuston hiili-14-pitoisuus oli 14 % elävän eläimen vastaavasta pitoisuudesta. Kuinka kauan sitten mammutti eli?
b) Egyptiläisestä pyramidista löydetyn muumion hiili-14-pitoisuus oli vuonna 1970 vähentynyt 65 prosenttiin. Miltä ajalta muumio on peräisin?

**200.** Luku $2^{30\,402\,457} - 1$ on suurin tunnettu alkuluku (toukokuu 2006). Kuinka monta numeroa luvussa on? Mitkä luvun kolme ensimmäistä numeroa ovat?

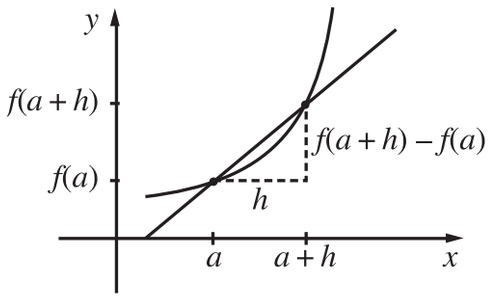
**201.** Määritä luvun $0{,}02^{1001}$ likiarvo kolmen numeron tarkkuudella. Kuinka monta peräkkäistä nollaa seuraa desimaalipilkkua luvun $0{,}02^{1001}$ desimaalimuodossa?

# Neperin luku *e* ja luonnollinen logaritmi

Eksponenttifunktiot $k^x$ ja logaritmifunktiot $\log_k x$ liittyvät määritelmiensä mukaisesti saumattomasti toisiinsa. Seuraava tavoite on löytää eksponenttifunktion $k^x$ derivaattafunktio. Derivaattafunktion määrittäminen vaatii kuitenkin uusien käsitteiden ja välineiden löytämistä.

**Ongelma 1**

Kun $h$:n arvot lähenevät nollaa, erotusosamäärän $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ arvot lähenevät funktion $f$ derivaattaa kohdassa $a$. Sijoittamalla lausekkeeseen $h$:n arvo, joka on lähellä nollaa, voidaan laskea derivaatan likiarvo. Esimerkiksi käyttämällä $h$:n arvoa 0,001 saadaan funktion $f(x) = 2^x$ derivaatalle kohdassa 3 likiarvo




$$\frac{2^{3+0{,}001}-2^3}{0{,}001} = \frac{2^{3{,}001}-2^3}{0{,}001} \approx 5{,}55.$$

Täydennä taulukko eksponenttifunktion $f(x) = 2^x$ derivaatan likiarvoilla kohdissa 0, 1 ja 2. Käytä $h$:n arvoa 0,001. Laske taulukkoon myös suhteet $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Ehdota likimääräinen lauseke funktion $f(x) = 2^x$ derivaattafunktiolle.

| $x$ | $f(x) = 2^x$ | $f'(x)$ | suhde $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | |
| 1 | 2 | | |
| 2 | 4 | | |
| 3 | 8 | 5,55 | 0,69 |

Lähtökohtana eksponenttifunktioiden derivoimiselle on seuraava havainto:

Jos $f(x) = k^x$, niin $f'(x) = f'(0)f(x)$.

Siis eksponenttifunktion $k^x$ derivaatta missä tahansa kohdassa $x$ on funktion arvo kohdassa $x$ kerrottuna funktion derivaatalla kohdassa $0$.

**Kaavan $f'(x) = f'(0)f(x)$ perustelu.** Funktion $f(x) = k^x$ erotusosamäärä kohdassa $a$ on

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{k^{a+h} - k^a}{h},$$

ja derivaatta kohdassa $a$ on

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{k^{a+h} - k^a}{h}.$$

Erityisesti erotusosamäärä kohdassa $0$ on

$$\frac{k^{0+h} - k^0}{h} = \frac{k^h - 1}{h},$$

ja derivaatta kohdassa $0$ on

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{k^h - 1}{h}.$$

Oletetaan, että $f'(0)$ on olemassa.*

---

* Derivaatan $f'(0)$ (raja-arvon $\lim_{h \to 0} \frac{k^h - 1}{h}$) olemassaoloa ei voida osoittaa tämän kurssin keinoin.

Muokataan funktion $f(x) = k^x$ erotusosamäärää kohdassa $a$.

$$\frac{k^{a+h} - k^a}{h}$$ Potenssikaava $k^{r+s} = k^r \cdot k^s$.

$$= \frac{k^a k^h - k^a}{h}$$ Osoittajan termeillä on yhteinen tekijä $k^a$.

$$= \frac{k^a(k^h - 1)}{h}$$

$$= k^a \cdot \frac{k^h - 1}{h} \to k^a f'(0), \text{ kun } h \to 0$$

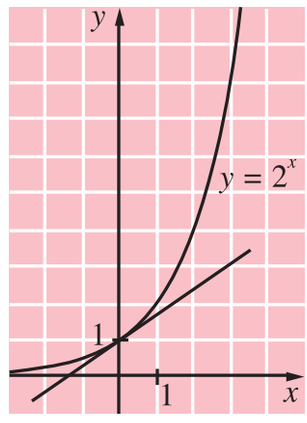
Siis jokaisessa kohdassa $a$ on $f'(a) = f(a)f'(0)$. □

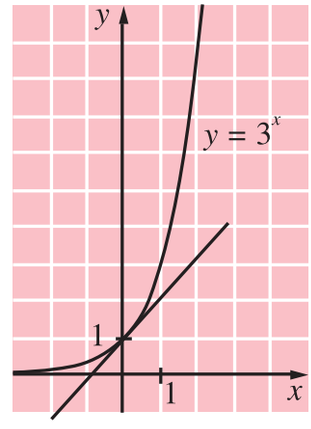
Tässä luvussa löydetään sellainen kantaluku $k$, että funktiolle $f(x) = k^x$ pätee $f'(0) = 1$. Tällöin on $f'(x) = f(x)$ eli $\mathrm{D}k^x = k^x$.

Tämä erityinen eksponenttifunktio, jonka derivaattafunktio on funktio itse, on lähtökohta kaikkien eksponenttifunktioiden derivoimiselle.

**Ongelma 2**

Kuvioihin on piirretty funktioiden $2^x$ ja $3^x$ kuvaajien tangentit muuttujan arvon $0$ kohdalle. Tangenttien kulmakertoimista näkyy, että funktion $2^x$ derivaatta kohdassa $0$ on pienempi kuin $1$ ja funktion $3^x$ derivaatta kohdassa $0$ on suurempi kuin $1$.




Kun funktion $k^x$ derivaattaa kohdassa $0$ arvioidaan lausekkeella $\dfrac{k^{0{,}001} - 1}{0{,}001}$, nähdään, että funktion $2{,}5^x$ derivaatta kohdassa $0$ on pienempi kuin $1$:

$$\frac{2{,}5^{0{,}001} - 1}{0{,}001} \approx 0{,}92 < 1.$$

Funktion $2{,}8^x$ derivaatta kohdassa $0$ on suurempi kuin $1$:

$$\frac{2{,}8^{0{,}001} - 1}{0{,}001} \approx 1{,}03 > 1.$$

Jatka haarukointia ja määritä kaksidesimaalinen likiarvo sellaiselle kantaluvulle $k$, että funktion $k^x$ derivaatta kohdassa $0$ on $1$.

### Neperin luku

Lukujen 2,71 ja 2,72 välissä sijaitsee eräs matematiikan tärkeimmistä luvuista, niin sanottu *Neperin luku* $e$. Luku $e$ on irrationaaliluku, ja sen likiarvo kymmenen desimaalin tarkkuudella on 2,7182818285. Neperin luku $e$ on tärkeä seuraavan ominaisuutensa takia:

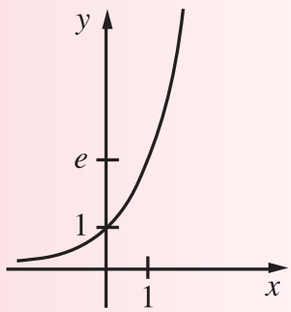
### Eksponenttifunktion $e^x$ derivaatta

$$De^x = e^x$$

Eksponenttifunktion $e^x$ derivaattafunktio on funktio $e^x$ itse.

### Eksponenttifunktion $e^x$ ominaisuuksia

- Funktio $e^x$ on määritelty kaikkialla.
- Funktio $e^x$ on kaikkialla aidosti kasvava.
- Kun muuttujan arvot suurenevat rajatta, funktion $e^x$ arvot suurenevat rajatta.
- Kun muuttujan arvot pienenevät rajatta, funktion $e^x$ arvot lähenevät nollaa.
- Funktion $e^x$ arvojoukko on $]0, \infty[$.




Funktion $e^x$ arvoja voidaan laskea laskimen näppäimellä $e^x$, ja graafiset laskimet piirtävät funktion $e^x$ kuvaajan. Laskemalla funktion arvo $e^1$ saadaan Neperin luvun $e$ likiarvo.

**ESIMERKKI 1**

Derivoi funktio $5e^x$.

**Ratkaisu**

$$\mathrm{D}\, 5e^x = 5\mathrm{D}e^x = 5e^x$$

**Vastaus**

$5e^x$

## ESIMERKKI 2

Määritä funktion $f(x) = x^2e^x$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

**Ratkaisu**

Selvitetään funktion $f$ derivaattafunktion merkit. Funktio $f(x) = x^2e^x$ on funktioiden $x^2$ ja $e^x$ tulo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(x^2) \cdot e^x + x^2 \,\mathrm{D}e^x && \mathrm{D}(uv) = u'v + uv' \\ &= 2x \cdot e^x + x^2e^x && \text{Erotetaan yhteinen tekijä } e^x. \\ &= (2x + x^2)e^x \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion $(2x + x^2)e^x$ nollakohdat.

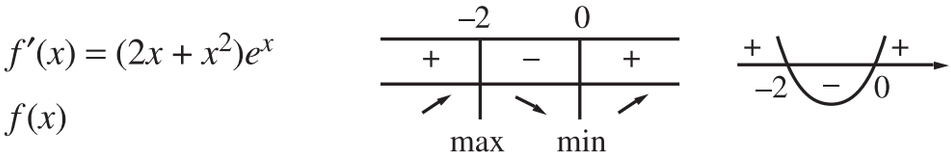
$$(2x + x^2)e^x = 0$$

Koska $e^x > 0$ kaikilla $x$, yhtälö toteutuu, jos ja vain jos tulon ensimmäinen tekijä on $0$.

$$\begin{aligned} 2x + x^2 &= 0 \\ x(2 + x) &= 0 \\ x = 0 \text{ tai } x &= -2 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaattafunktion $f'(x) = (2x + x^2)e^x$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion $f$ kulkukaavioksi.

Koska $e^x > 0$ kaikilla $x$, derivaattafunktion $f'(x)$ merkki riippuu vain funktion $2x + x^2$ merkistä. Funktion $2x + x^2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.*




* Derivaattafunktion merkit voidaan perustella myös laskemalla derivaattafunktion arvoja.

Kohta $-2$ on funktion $f(x) = x^2e^x$ maksimikohta. Vastaava maksimiarvo on $f(-2) = (-2)^2e^{-2} = 4e^{-2} \approx 0{,}54$.

Kohta $0$ on funktion $f$ minimikohta. Vastaava minimiarvo on $f(0) = 0$.

**Vastaus** maksimikohta $-2$ ja maksimiarvo $4e^{-2}$, minimikohta $0$ ja minimiarvo $0$

## ESIMERKKI 3

Mikä on pienin arvo, jonka funktio $g(x) = e^x - 3x$ saa välillä $[1, 2]$?

**Ratkaisu** Derivoidaan funktio $g$.

$g'(x) = e^x - 3$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$e^x - 3 = 0$

$e^x = 3$ Yhtälön ratkaisu on luvun $3$ $e$-kantainen logaritmi.

$x = \log_e 3$ Logaritmia, jonka kantaluku on Neperin luku $e$, kutsutaan luonnolliseksi logaritmiksi ja merkitään $\ln$.

$x = \ln 3 \approx 1{,}10$ Likiarvo saadaan laskimen näppäimellä LN.

Välillä $]1, 2[$ on derivaattafunktion nollakohta $\ln 3$. Lasketaan funktion $g(x) = e^x - 3x$ arvo derivaattafunktion nollakohdassa ja välin päätepisteissä.

$g(\ln 3) = e^{\ln 3} - 3 \ln 3$ $\qquad e^{\ln a} = a$

$= 3 - 3 \ln 3 \approx -0{,}30$

$g(1) = e^1 - 3 \cdot 1 = e - 3 \approx -0{,}28$

$g(2) = e^2 - 3 \cdot 2 = e^2 - 6 \approx 1{,}39$

Arvoista pienin on $3 - 3 \ln 3$.

**Vastaus** $3 - 3 \ln 3 \approx -0{,}30$

### Luonnollinen logaritmi

Luvun $a$ $e$-kantaista logaritmia $\log_e a$ kutsutaan luvun $a$ *luonnollisiksi logaritmiksi*.
Luvun $a$ luonnollinen logaritmi merkitään $\ln a$.*

Luonnollisia logaritmeja voi laskea laskimen näppäimellä LN.

## ESIMERKKI 4

a) Laske $e^{\ln 7}$.
b) Ratkaise yhtälö $5e^x - 1 = 0$.

**Ratkaisu**

a) Kun luvun $e$ eksponenttina on luvun $7$ $e$-kantainen logaritmi, niin potenssin arvo on $7$.

$$e^{\ln 7} = 7$$

b) Yhtälöstä $5e^x - 1 = 0$ ratkaistaan ensin $e^x$.

$$5e^x - 1 = 0$$

$$5e^x = 1 \qquad \big| : 5$$

$$e^x = \frac{1}{5}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentti $x$ on luvun $\frac{1}{5}$ $e$-kantainen logaritmi.

$$x = \ln \frac{1}{5}$$

Juuri voidaan saattaa toiseen muotoon osamäärän logaritmikaavalla $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

$$= \ln 1 - \ln 5 = 0 - \ln 5 = -\ln 5$$

**Vastaus**

a) $7$ b) $x = \ln \frac{1}{5} = -\ln 5 \ (\approx -1{,}61)$

---

* Luku $e$ on nimetty Neperin luvuksi logaritmien keksijän skotlantilaisen *John Napierin* (1550 – 1617) kunniaksi. Luvun nimesi ja merkinnän $e$ otti käyttöön sveitsiläinen *Leonhard Euler* (1707 – 1783).

# TEHTÄVIÄ

## SARJA I.
## PERUSTEHTÄVIÄ

**202.** Derivoi funktio.

a) $3e^x$ b) $5x - 4e^x$

**203.** Määritä funktion derivaattafunktion nollakohdat.

a) $f(x) = x^3e^x$ b) $g(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$

**204.** Määritä funktion $f(x) = (x - 2)e^x$ pienin arvo.

**205.** Osoita, että funktio $g(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$ on kaikkialla aidosti kasvava.

**206.** a) Määritä lukujen $e^4$ ja $\dfrac{1}{e}$ luonnolliset logaritmit.
b) Minkä luvun luonnollinen logaritmi on $-3$?

**207.** a) Laske $e^{\ln 7}$ ja $e^{-\ln 7}$.
b) Ilmaise luku 5 luvun $e$ potenssina.

**208.** Ratkaise yhtälö.

a) $e^x = 4$ b) $e^x + 4 = 0$

c) $4e^x - 1 = 0$

**209.** Funktion $f(x) = e^x + x$ kuvaajalle piirretään tangentti, jonka kulmakerroin on 3. Mihin kuvaajan pisteeseen tangentti piirretään?

**210.** Mikä on funktion $f(x) = e^x - 7x$ suurin ja mikä pienin arvo välillä $[1, 2]$?

**211.** Mikä on käyrän $y = \dfrac{e^x}{x}$, missä $x > 0$, alin piste?

**212.** Osoita, että käyrä $y = e^x - x$ on suoran $2x - 2y + 1 = 0$ yläpuolella.

**213.** Funktion $e^x$ kuvaajan pisteeseen $(a, e^a)$ piirretään kuvaajan tangentti ja $y$-akselin suuntainen suora. Osoita, että suorien $x$-akselista erottaman janan pituus ei riipu kuvaajan pisteestä $(a, e^a)$.

## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**214.** Olkoon $f(x) = x^4e^x$. Muodosta funktiot $f'(x)$ ja $f''(x)$.

**215.** Osoita, että funktio $f(x) = 3e^x + x^3$ on kaikkialla aidosti kasvava.

**216.** Mikä funktion $f(x) = xe^x$ pienin arvo on?

**217.** Määritä funktion $g(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

**218.** a) Määritä lukujen 1, $e$ ja $\dfrac{1}{e^2}$ luonnolliset logaritmit.
b) Määritä luku, jonka luonnollinen logaritmi on 3, ja luku, jonka luonnollinen logaritmi on $-1$.

**219.** a) Laske $e^{\ln 5}$, $e^{-\ln 3}$ ja $e^{3 \ln 2}$.
b) Ilmaise luku 6 luvun $e$ potenssina.

**220.** Määritä funktion derivaattafunktion nollakohdat.

a) $f(x) = e^x - 2x$ b) $g(x) = e^x + 2x$

c) $h(x) = 2e^x - x$

**221.** Osoita, että $5e^x - 1 \geqslant x + \ln 5$ kaikilla $x$.

**222.** Määritä käyrien $y = (x^2 + 2x - 1)e^x$ ja $y = -e^x$ leikkauspisteet. Osoita, että toisessa leikkauspisteessä käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

**223.** Suorakulmion yksi sivu on $x$-akselilla, yksi sivu suoralla $x = 1$ ja yksi kärki käyrällä $y = e^x$, missä $x < 1$.
a) Piirrä ehdot täyttävä suorakulmio.
b) Suorakulmion yksi kärki on $x$-akselilla kohdan $1$ vasemmalla puolella. Ilmaise suorakulmion pinta-ala tämän kärjen $x$-koordinaatin funktiona.
c) Mikä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

**224.** Funktion $e^x$ kuvaajalle piirretään origon kautta kulkeva tangentti. Missä pisteessä tangentti sivuaa kuvaajaa? Mikä tangentin yhtälö on?

**225.** Millä vakion $a$ arvoilla funktio $f(x) = (x^2 + a)e^x$ on kaikkialla aidosti kasvava?

**226.** Olkoon $n$ positiivinen kokonaisluku. Osoita, että $\frac{e^x}{x^n} \geqslant \frac{e^n}{n^n}$ kaikilla muuttujan $x$ positiivisilla arvoilla.*

**227.** Osoita, että yhtälöllä $x^3e^x = 1$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Määritä ratkaisun kaksidesimaalinen likiarvo.

**228.** Osoita, että funktioiden $f(x) = e^x$ ja $g(x) = \sqrt{3 - 2x}$ kuvaajilla on yksi yhteinen piste ja että tässä pisteessä kuvaajat leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

**229.** Osoita, että kaikilla muuttujan $x$ positiivisilla arvoilla on $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

**230.** Oletetaan, että funktiolla $f$ on origossa ja origon läheisyydessä kaikkien kertalukujen derivaatat eli derivaatta $f'$, toinen derivaatta $f''$, kolmas derivaatta $f'''$, neljäs derivaatta $f^{(4)}$ jne. Funktion $f$ astetta $n$ oleva *Taylorin polynomi* on astetta $n$ oleva polynomifunktio $T_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, jonka
i) arvo kohdassa $0$ on sama kuin funktion $f$ arvo kohdassa $0$
ii) kaikkien kertalukujen derivaatat kohdassa $0$ aina $n$. derivaattaan asti ovat yhtä suuret kuin funktiolla $f$. (Sen jälkeen astetta $n$ olevan polynomifunktion derivaatat ovat nollia.)
Voidaan osoittaa, että kun Taylorin polynomin $T_n(x)$ asteluku $n$ kasvaa, niin funktion $T_n(x)$ arvot lähenevät funktion $f$ arvoja. Taylorin polynomeja käytetään, kun funktion arvoja halutaan laskea polynomifunktiolla (peruslaskutoimituksilla). Esimerkiksi laskimet laskevat funktion $e^x$ arvoja Taylorin polynomien avulla.
Määritä funktion $f(x) = e^x$ kolmannen ja neljännen asteen Taylorin polynomit $T_3(x)$ ja $T_4(x)$. Piirrä samaan graafisen laskimen näyttöön funktioiden $e^x$, $T_3(x)$ ja $T_4(x)$ kuvaajat.

---

* Luku $\frac{e^n}{n^n}$ esiintyy kuuluisassa *Stirlingin kaavassa*, joka näyttää mielenkiintoisen yhteyden kahden tärkeän luvun $e$ ja $\pi$ välillä. Kaavan mukaan suurilla $n$:n arvoilla on $\frac{e^n}{n^n} \approx \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}$. Tutki arvion tarkkuutta eri $n$:n arvoilla. Kaava on myös osoitus siitä, että eri matematiikan alueiden välillä on syvällisiä yhteyksiä. Luku $e$ on tärkeä luku myös trigononometristen funktioiden tutkimuksessa ja ympyrän geometriassa (kaavan luku $\pi$) kuten myös lukuteoriassa ja todennäköisyyslaskennassa (kaavan luku $n!$).

# Yhdistetty funktio

**Ongelma**

Simon ja Ullan tehtävänä on laskea funktion $h(x) = \sqrt{17x - 3572}$ arvo kohdassa 213. Simo osaa laskea funktion $s(x) = 17x - 3572$ arvoja allekkain kertomalla ja vähentämällä, mutta ei tiedä, mikä on neliöjuuri. Ulla on unohtanut allekkain kertomisen, mutta tuntee neliöjuurifunktion $u(x) = \sqrt{x}$. Kumpi laskee ensin, Simo vai Ulla? Mitä laskee Simo ja mitä laskee Ulla?

**ESIMERKKI 1**

Olkoon $g(x) = \sqrt{x}$ ja $f(x) = 4x + 1$.
Muodosta funktion $h(x) = g(f(x))$ lauseke.

**Ratkaisu**

Funktion $h(x) = g(f(x))$ arvo kohdassa $x$ on funktion $g(x) = \sqrt{x}$ arvo kohdassa $f(x) = 4x + 1$. Funktion lauseke voidaan muodostaa vaiheittain kahdella tavalla.

$h(x) = g(f(x))$ Sijoitetaan funktion $g$ lauseke.

$= \sqrt{f(x)}$ Sijoitetaan funktion $f$ lauseke.

$= \sqrt{4x + 1}$

tai

$h(x) = g(f(x))$ Sijoitetaan funktion $f$ lauseke.

$= g(4x + 1)$ Sijoitetaan funktion $g$ lauseke.

$= \sqrt{4x + 1}$

**Vastaus**

$h(x) = \sqrt{4x + 1}$

## Yhdistetty funktio

Funktioista $f$ ja $g$ muodostettu funktio $g(f(x))$, jonka arvo kohdassa $x$ on funktion $g$ arvo kohdassa $f(x)$, on *yhdistetty funktio*.

Yhdistetyssä funktiossa $g(f(x))$ funktio $f$ on *sisäfunktio* ja funktio $g$ *ulkofunktio*.

Funktio $h(x) = \sqrt{4x + 1}$ on yhdistetty funktio $g(f(x))$, missä sisäfunktio $f(x) = 4x + 1$ ja ulkofunktio $g(x) = \sqrt{x}$.

Yhdistettyä funktiota, jonka sisäfunktio on $f$ ja ulkofunktio $g$, merkitään $g \circ f$. Siis funktion $g \circ f$ arvo kohdassa $x$ on $g(f(x))$ eli

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

### ESIMERKKI 2

Olkoon $g(x) = x^3$ ja $f(x) = 4x - 1$. Muodosta yhdistetyn funktion
a) $g \circ f$ b) $f \circ g$ lauseke.

**Ratkaisu**

a) On määritettävä $g(f(x))$, kun $g(x) = x^3$ ja $f(x) = 4x - 1$. Tulos $g(f(x)) = (4x - 1)^3$ voidaan hahmottaa suoraan tai siihen voidaan päätyä vaiheittain:

$g(f(x)) = g(4x - 1) = (4x - 1)^3$ Ensin sijoitetaan sisäfunktion lauseke.

tai

$g(f(x)) = f(x)^3 = (4x - 1)^3$. Ensin sijoitetaan ulkofunktion lauseke.

b) On määritettävä $f(g(x))$, kun $f(x) = 4x - 1$ ja $g(x) = x^3$. Tulos $f(g(x)) = 4x^3 - 1$ voidaan hahmottaa suoraan tai siihen voidaan päätyä vaiheittain:

$f(g(x)) = f(x^3) = 4x^3 - 1$ Ensin sijoitetaan sisäfunktion lauseke.

tai

$f(g(x)) = 4g(x) - 1 = 4x^3 - 1$. Ensin sijoitetaan ulkofunktion lauseke.

**Vastaus**

a) $g(f(x)) = (4x - 1)^3$ b) $f(g(x)) = 4x^3 - 1$

## ESIMERKKI 3

Tulkitse funktio yhdistetyksi funktioksi $u(s(x))$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ b) $g(x) = e^{5x}$

**Ratkaisu**

a) Etsitään funktiosta $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ sisäfunktio $s(x)$ tutkimalla, kuinka funktion arvot voitaisiin laskea kahdessa vaiheessa.

Kun lasketaan funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ arvo kohdassa $x$, niin ensin voidaan laskea funktion $s(x) = x^2 - 1$ arvo kohdassa $x$, minkä jälkeen lasketaan $\dfrac{1}{s(x)}$. Siis

$$f(x) = \frac{1}{s(x)} = u(s(x)),$$

missä $s(x) = x^2 - 1$ ja $u(x) = \dfrac{1}{x}$.*

b) Kun lasketaan funktion $g(x) = e^{5x}$ arvo kohdassa $x$, niin ensin voidaan laskea funktion $s(x) = 5x$ arvo kohdassa $x$, minkä jälkeen lasketaan $e^{s(x)}$. Siis

$g(x) = e^{s(x)} = u(s(x))$,

missä $s(x) = 5x$ ja $u(x) = e^x$.

**Vastaus**

a) esimerkiksi $s(x) = x^2 - 1$ ja $u(x) = \dfrac{1}{x}$

b) esimerkiksi $s(x) = 5x$ ja $u(x) = e^x$

---

* Voitaisiin myös esimerkiksi laskea ensin funktion $s(x) = x^2$ arvo ja sen jälkeen $\dfrac{1}{s(x) - 1}$, eli $f(x) = \dfrac{1}{s(x) - 1} = u(s(x))$, missä $s(x) = x^2$ ja $u(x) = \dfrac{1}{x - 1}$. Jokainen funktio voidaan tulkita yhdistetyksi funktioksi äärettömän monella eri tavalla.

Määritetään erotusosamäärän avulla yhdistetyn funktion $g(f(x))$ derivaatta kohdassa $a$. Oletetaan, että funktio $f$ on derivoituva kohdassa $a$ ja funktio $g$ on derivoituva kohdassa $f(a)$.

Funktion $g(f(x))$ erotusosamäärä kohdassa $a$ on

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a}.$$

Tutkitaan, mitä lukua erotusosamäärän arvot lähenevät, kun muuttujan $x$ arvot lähenevät arvoa $a$.

Kun erotusosamäärä lavennetaan lausekkeella $f(x) - f(a)$, se tulee muotoon*

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Tutkitaan erikseen lausekkeita $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ja $\dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)}$.

Lauseke $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ on funktion $f$ erotusosamäärä kohdassa $a$, joten

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \to f'(a), \text{ kun } x \to a.$$

---

* Oletetaan, että kohdan $a$ läheisyydessä on $f(x) - f(a) \neq 0$ eli $f(x) \neq f(a)$. Tämä ominaisuus on kaikilla tässä kurssissa käsiteltävillä funktioilla paitsi vakiofunktiolla. On kuitenkin olemassa muitakin funktioita kuin vakiofunktio, joille tämä ominaisuus ei päde. Näillekin funktioille pätee yhdistetyn funktion derivointisääntö, mutta sen todistaminen vaatii muita keinoja. Jos $f$ on vakiofunktio, myös yhdistetty funktio $g \circ f$ on vakiofunktio ja sille pätee yhdistetyn funktion derivointisääntö.

Lauseke $\dfrac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}$ voidaan myös tulkita erotusosamääräksi.

Merkitään $f(x)=t$ ja $f(a)=b$. Tällöin

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}=\frac{g(t)-g(b)}{t-b}.$$

Lauseke on funktion $g$ erotusosamäärä kohdassa $b$.

Koska funktio $f$ on derivoituva kohdassa $a$, se on jatkuva kohdassa $a$, joten $f(x)\to f(a)$, kun $x\to a$.

Siis $t\to b$, kun $x\to a$, joten

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}=\frac{g(t)-g(b)}{t-b}\to g'(b)=g'(f(a)),\text{ kun } x\to a.$$

Yhdistämällä päätellyt raja-arvot saadaan:

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\to\ g'(f(a))\cdot f'(a),\text{ kun } x\to a.$$

Siis funktion $g(f(x))$ derivaatta kohdassa $a$ on $g'(f(a))f'(a)$.

On johdettu sääntö, jonka avulla voidaan derivoida yhdistettyjä funktioita.

### Yhdistetyn funktion derivointisääntö

$$Dg(f(x))=g'(f(x))f'(x)$$

Yhdistetyn funktion $g(f(x))$ derivaatta kohdassa $x$ on ulkofunktion $g$ derivaatta kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion $f$ derivaatalla kohdassa $x$.

**ESIMERKKI 4**

Derivoi funktio käyttämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä.

a) $(x^2 + 1)^4$ b) $e^{x^3}$

**Ratkaisu**

a) Funktio $(x^2 + 1)^4$ on yhdistetty funktio $g(f(x))$, missä $g(x) = x^4$ ja $f(x) = x^2 + 1$.

Sovelletaan yhdistetyn funktion derivointisääntöä

$Dg(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$. Ulkofunktion $g$ derivaatta kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion $f$ derivaatalla.

Ulkofunktion $g(x) = x^4$ derivaatta on $g'(x) = 4x^3$. Ulkofunktion derivaatta kohdassa $f(x)$ on $g'(f(x)) = 4(x^2 + 1)^3$. Sisäfunktion derivaatta on $f'(x) = 2x$.

Siis

$D(x^2 + 1)^4 = 4(x^2 + 1)^3 \cdot 2x$ Ulkofunktion $x^4$ derivaatta $4x^3$ kohdassa $x^2 + 1$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $2x$.

$= 8x(x^2 + 1)^3$. *

b) Funktio $e^{x^3}$ on yhdistetty funktio $g(f(x))$, missä $g(x) = e^x$ ja $f(x) = x^3$.

Sovelletaan yhdistetyn funktion derivointisääntöä

$Dg(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$. Ulkofunktion $g$ derivaatta kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion $f$ derivaatalla.

---

* Funktio $(x^2 + 1)^4$ on opittu derivoimaan kurssissa Derivaatta käyttämällä funktion potenssin $f(x)^n$ derivointikaavaa $Df(x)^n = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$. Derivointikaava johdateltiin käyttämällä funktioiden tulon derivointisääntöä. Kaava voidaan perustella myös yhdistetyn funktion derivointisäännöllä, sillä derivaatan lausekkeessa on yhdistetyn funktion $f(x)^n$ ulkofunktion $x^n$ derivaatta $nx^{n-1}$ kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $f'(x)$.

Ulkofunktion $g(x) = e^x$ derivaatta on $g'(x) = e^x$. Ulkofunktion derivaatta kohdassa $f(x)$ on $g'(f(x)) = e^{x^3}$. Sisäfunktion derivaatta on $f'(x) = 3x^2$. Siis

$$\mathrm{D}e^{x^3} = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}.$$

Ulkofunktion $e^x$ derivaatta $e^x$ kohdassa $x^3$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $3x^2$.

**Vastaus** a) $8x(x^2 + 1)^3$ b) $3x^2 e^{x^3}$

Muotoa $e^{f(x)}$ oleva funktio voidaan tulkita yhdistetyksi funktioksi $g(f(x))$, jonka ulkofunktio on $g(x) = e^x$. Johdetaan derivointikaava funktiolle $e^{f(x)}$ käyttämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä

$$\mathrm{D}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Ulkofunktion $g$ derivaatta kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion $f$ derivaatalla.

Ulkofunktion $g(x) = e^x$ derivaatta on $g'(x) = e^x$. Siis

$$\mathrm{D}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x).$$

Ulkofunktion $e^x$ derivaatta $e^x$ kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $f'(x)$.

### Funktion $e^{f(x)}$ derivaattafunktio

Jos funktio $f$ on derivoituva, niin

$$\mathrm{D}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x).$$

## ESIMERKKI 5

Derivoi funktio. a) $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ b) $\dfrac{1}{e^x}$

**Ratkaisu**

a) $\mathrm{D}e^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \mathrm{D}(-\frac{1}{2}x^2)$ $\qquad \mathrm{D}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x)$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-\frac{1}{2} \cdot 2x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

b) Funktio $\dfrac{1}{e^x}$ voidaan ilmaista muodossa $e^{f(x)}$.

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

Derivoidaan.

$$\mathrm{D}\frac{1}{e^x} = \mathrm{D}e^{-x} = e^{-x} \cdot \mathrm{D}(-x) \qquad \mathrm{D}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x)$$

$$= e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

**Vastaus**

a) $-xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ b) $-e^{-x}$

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**231.** Muodosta funktion $h(x) = g(f(x))$ lauseke, kun

a) $g(x) = x^3$ ja $f(x) = 6x + 7$

b) $g(x) = e^x$ ja $f(x) = -3x$.

**232.** Muodosta lauseke yhdistetylle funktiolle, jonka

a) ulkofunktio on $\sqrt{x}$ ja sisäfunktio $3x + 1$

b) ulkofunktio on $3x + 1$ ja sisäfunktio $\sqrt{x}$.

**233.** Muodosta funktion $h = g \circ f$ lauseke, kun $g(x) = x^2 - 3x + 1$ ja

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = e^x$.

**234.** Muodosta lauseke yhdistetylle funktiolle, jonka

a) ulkofunktio on $e^x$ ja sisäfunktio $\frac{x}{2}$

b) ulkofunktio on $\sqrt{x}$ ja sisäfunktio $e^x$.

**235.** Mikä on ulkofunktio $u(x)$, jos funktio $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 1}$ tulkitaan yhdistetyksi funktioksi $u(s(x))$, jonka sisäfunktio $s(x)$ on

a) $4x^2 + 1$ b) $4x^2$ c) $2x$?

**236.** Tulkitse funktio yhdistetyksi funktioksi $u(s(x))$.

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ b) $g(x) = (x - 1)^4 + (x - 1)^2$

**237.** Derivoi funktio.

a) $e^{5x}$ b) $e^{-3x^2}$ c) $\frac{1}{2}e^{-x^4}$

**238.** Ilmaise funktio muodossa $e^{f(x)}$ ja derivoi.

a) $(e^x)^2$ b) $\frac{1}{e^{3x}}$ c) $\sqrt{e^x}$

**239.** Derivoi funktio. Suorita ensin kertolasku.

a) $f(x) = e^x(e^{-x} - e^{-3x})$

b) $g(x) = (e^x + 3e^{-x})(e^x - 3e^{-x})$

**240.** Jos funktio $g$ on kaikkialla aidosti kasvava, niin yhdistetyn funktion $g(f(x))$ arvot ovat sitä suurempia, mitä suurempia funktion $f(x)$ arvot ovat. Erityisesti funktion $g(f(x))$ arvo on suurin (pienin) silloin, kun funktion $f(x)$ arvo on suurin (pienin). Käytä tätä hyväksesi ja määritä

a) funktion $3^{4x - x^2}$ suurin arvo

b) funktion $e^{x^2 - 3}$ pienin arvo.

**241.** Kuviossa on erään funktion $f$ kuvaaja. Piirrä funktion $g(f(x))$ kuvaaja, kun

a) $g(x) = -x$

b) $g(x) = |x|$

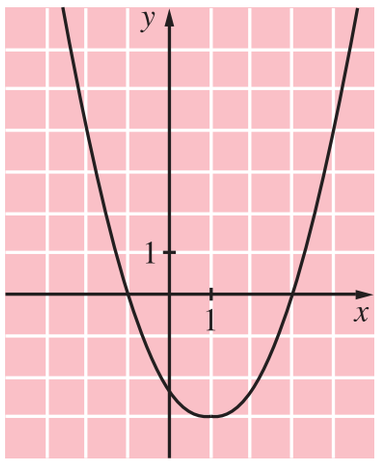
c) $g(x) = x - 2$.

Piirrä funktion $f(g(x))$ kuvaaja, kun

d) $g(x) = -x$

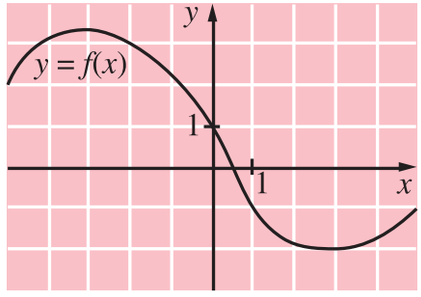
e) $g(x) = |x|$

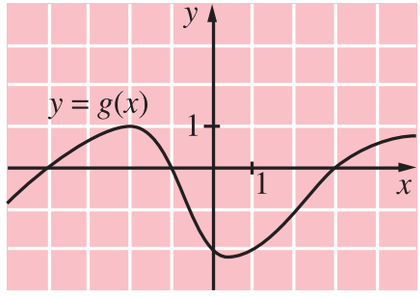
f) $g(x) = x - 2$.



## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**242.** Kuvioissa on funktioiden $f$ ja $g$ kuvaajat. Määritä kuvaajien avulla
a) $f(g(1))$ ja $f(g(3))$
b) $g(f(1))$ ja $g(f(3))$.




**243.** Muodosta lauseke yhdistetylle funktiolle, jonka ulkofunktio on $x^5 + 3x^3 + 2$ ja sisäfunktio

a) $x - 4$ b) $\frac{1}{x}$.

**244.** Mikä on sisäfunktio $s(x)$, jos funktio $f(x) = (1 + e^{2x})^3$ tulkitaan yhdistetyksi funktioksi $u(s(x))$, jonka ulkofunktio $u(x)$ on

a) $x^3$ b) $(1 + x)^3$
c) $(1 + x^2)^3$?

**245.** Tulkitse funktio yhdistetyksi funktioksi $u(s(x))$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{9x^2 + 1}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{3^x}$

c) $h(x) = x^{20} + 5x^{10} - 3$

**246.** Tulkitse funktio $f(x) = e^{2x}$ yhdistetyksi funktioksi $u \circ s$ niin, että

a) $u(x) = e^x$ b) $s(x) = e^x$.

**247.** Derivoi funktio.

a) $e^{\pi x}$ b) $6e^{\frac{1}{2}x^2}$ c) $\dfrac{1}{2e^{6x}}$

**248.** Derivoi.

a) $f(x) = \dfrac{e^x - 3}{e^x}$ b) $g(x) = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x}$

**249.** Derivoi.

a) $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$

b) $g(x) = (1 + \dfrac{1}{e^x})^2$

**250.** Määritä funktion suurin arvo. (Katso tehtävä 240.)

a) $e^{6x - x^2}$ b) $4^{6x - x^2}$
c) $(6x - x^2)^5$

**251.** Derivoi funktio.

a) $(e^{3x} - 1)^4$ b) $e^{-\frac{1}{2}(4x-1)^3}$ c) $e^{xe^{-x}}$

**252.** Anna esimerkki sellaisista funktioista $f$ ja $g$, että $f$ ja $g$ eivät ole samoja funktioita, mutta yhdistetyt funktiot $f \circ g$ ja $g \circ f$ ovat sama funktio.

**253.** a) Funktion $f$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$, ja funktio $f$ toteuttaa kaikilla muuttujan $x$ reaaliarvoilla yhtälön $f(x - 1) = x^2 - 3x + 4$. Määritä funktio $f$.
b) Funktion $g$ määrittelyjoukko on $]0, \infty[$, ja funktio $g$ toteuttaa jokaisella muuttujan $x$ reaaliarvolla yhtälön $g(e^x) = 3e^x - 5x$. Määritä funktio $g$.

# Eksponenttifunktiot

**ESIMERKKI 1**

Derivoi funktio $3^x$.

**Ratkaisu**

Ilmaistaan kantaluku 3 Neperin luvun $e$ potenssina.

$$3 = e^{\ln 3}$$

Tällöin

$$3^x = (e^{\ln 3})^x \qquad \text{Potenssin potenssin kaava } (a^r)^s = a^{rs}.$$
$$= e^{x \ln 3}.$$

Siis

$$\mathrm{D}\, 3^x = \mathrm{D}\, e^{x \ln 3} \qquad \mathrm{D}\, e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$$
$$= e^{x \ln 3}\ \mathrm{D}(x \ln 3) = e^{x \ln 3}\ \ln 3$$
$$= 3^x \ln 3.$$

**Vastaus**

$3^x \ln 3$

Kaikkien eksponenttifunktioiden tutkiminen derivaatan avulla perustuu funktion $e^x$ ja yhdistetyn funktion $e^{f(x)}$ derivointikaavoihin.

$\mathrm{D}e^x = e^x$

$\mathrm{D}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x)$

Jokainen eksponenttifunktio $k^x$ voidaan nimittäin saattaa muotoon $e^{ax}$:

Ilmaistaan kantaluku $k$ Neperin luvun $e$ potenssina

$k = e^{\ln k}$,

jolloin

$k^x = (e^{\ln k})^x = e^{x \ln k}$.

Siis

$\mathrm{D}\, k^x = \mathrm{D}e^{x \ln k} = e^{x \ln k}\ \mathrm{D}(x \ln k) = e^{x \ln k}\ \ln k = k^x \ln k.$

**Eksponenttifunktion $k^x$ derivaattafunktio**

$\mathrm{D}\, k^x = k^x \ln k$

## ESIMERKKI 2

Radioaktiiviselle hajoamiselle on ominaista, että samassa ajanjaksossa aina yhtä monta prosenttia radioaktiivisesta aineesta hajoaa muiksi aineiksi. Fluorin radioaktiivisesta isotoopista fluori-18 hajoaa aina $32\ \%$ tunnissa. Isotooppia käytetään lääketieteellisissä tutkimuksissa varjoaineena. Oletetaan, että potilaalle on annettu $3{,}6$ milligramman annos.

a) Muodosta funktio, joka ilmaisee isotoopin määrän $t$ tunnin kuluttua.

b) Millä nopeudella isotoopin määrä vähenee hetkillä $t = 0{,}5$ ja $t = 2$?

### Ratkaisu

a) Joka tunti aineen massa pienenee määrään, joka on $100\ \% - 32\ \% = 68\ \%$ määrästä tunnin alussa. Massa tulee siis joka tunti 0,68-kertaiseksi. Kun on kulunut $t$ tuntia, massa on

$$m(t) = 3{,}6 \cdot 0{,}68^t.$$

Luonnontieteellisissä sovelluksissa eksponenttifunktiot ilmaistaan usein käyttämällä kantalukua $e$. Koska

$$0{,}68 = e^{\ln 0{,}68},$$

niin

$$0{,}68^t = (e^{\ln 0{,}68})^t = e^{t \ln 0{,}68}.$$

Likimääräisessä sovellustehtävässä on luontevaa siirtyä likiarvoon:

$$\ln 0{,}68 \approx -0{,}386.$$

Siis aineen määrä $t$ tunnin kuluttua on

$$m(t) = 3{,}6 \cdot 0{,}68^t \approx 3{,}6e^{-0{,}386t}.^*$$

---

* Radioaktiivisen aineen hajoamislaki on taulukkokirjoissa annettu juuri tällaisessa muodossa kantaluvun $e$ avulla: $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Tässä siis $N_0 = 3{,}6$ ja $\lambda = 0{,}386$.

b) Aineen määrän muutosnopeuden hetkellä $t$ ilmaisee derivaattafunktio $m'(t)$. Derivoidaan funktio $m(t) = 3{,}6e^{-0{,}386t}$.*

$$m'(t) = 3{,}6e^{-0{,}386t} \cdot (-0{,}386) \approx -1{,}390e^{-0{,}386t}$$

Muutosnopeus hetkellä $t = 0{,}5$ on

$$m'(0{,}5) = -1{,}390e^{-0{,}386 \cdot 0{,}5} \approx -1{,}1 \text{ (mg/h)}.$$

Puolen tunnin kuluttua aineen määrä vähenee nopeudella 1,1 mg/h.

Muutosnopeus hetkellä $t = 2$ on

$$m'(2) = -1{,}390e^{-0{,}386 \cdot 2} \approx -0{,}64 \text{ (mg/h)}.$$

Kahden tunnin kuluttua aineen määrä vähenee nopeudella 0,64 mg/h.

**Vastaus** a) $m(t) = 3{,}6 \cdot 0{,}68^t \approx 3{,}6e^{-0{,}386t}$ b) 1,1 mg/h ja 0,64 mg/h

---

* Voitaisiin myös derivoida funktion muoto $m(t) = 3{,}6 \cdot 0{,}68^t$ käyttämällä eksponenttifunktion derivointikaavaa $\mathrm{D}k^x = k^x \ln k$.

## ESIMERKKI 3

Osoita, että $e^{3x} \geqslant 75e^x - 250$ kaikilla $x$.

**Ratkaisu**

Tutkitaan erotusfunktiota $f(x) = e^{3x} - 75e^x + 250$. On osoitettava, että $f(x) \geqslant 0$ kaikilla $x$. Selvitetään funktion $f$ kulku.

Derivoidaan funktio $f$.

$$f'(x) = e^{3x} \cdot 3 - 75e^x = 3e^{3x} - 75e^x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$3e^{3x} - 75e^x = 0$ $\quad$ $e^x$ on yhteinen tekijä, sillä $e^{3x} = e^{2x+x} = e^{2x}e^x$.

$3e^x(e^{2x} - 25) = 0$ $\quad$ $e^x > 0$ kaikilla $x$.

$e^{2x} - 25 = 0$

$e^{2x} = 25$

$2x = \ln 25$

$$x = \frac{\ln 25}{2} = \frac{\ln 5^2}{2} \qquad \ln a^2 = 2 \ln a$$

$$= \frac{2 \ln 5}{2} = \ln 5 \approx 1{,}6$$

Muodostetaan derivaattafunktion $f'(x) = 3e^{3x} - 75e^x$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion $f$ kulkukaavioksi.

$f'(0) = 3e^0 - 75e^0 = 3 \cdot 1 - 75 \cdot 1 = -72 < 0$

$f'(2) = 3e^6 - 75e^2 \approx 656 > 0$

| | ln 5 | |
|---|---|---|
| $f'(x) = 3e^{3x} - 75e^x$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | ↗ |
| | min | |

Funktio $f(x) = e^{3x} - 75e^x + 250$ saa pienimmän arvon kohdassa $\ln 5$. Pienin arvo on

$$\begin{aligned} f(\ln 5) &= e^{3\ln 5} - 75e^{\ln 5} + 250 \\ &= (e^{\ln 5})^3 - 75e^{\ln 5} + 250 \qquad e^{\ln a} = a \\ &= 5^3 - 75 \cdot 5 + 250 = 0. \end{aligned}$$

Koska funktion $f$ pienin arvo on $0$, niin $f(x) \geqslant 0$ kaikilla $x$. Siis $e^{3x} \geqslant 75e^x - 250$ kaikilla $x$.

## TEHTÄVIÄ

### SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**254.** Derivoi funktio.

a) $5^x$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

**255.** Strontiumin radioaktiivisesta isotoopista strontium-90 hajoaa 2,4 % vuodessa. Isotoopin määrä ydinjätevarastossa on nyt 7,0 kg.
a) Muodosta funktio $m(t)$, joka ilmaisee isotoopin määrän $t$ vuoden kuluttua. Anna funktio myös muodossa, jossa kantalukuna on Neperin luku $e$.
b) Millä nopeudella isotoopin määrä vähenee hetkillä $t = 10$ ja $t = 50$?

**256.** Funktion $f(x) = e^{-4x}$ kuvaajalle piirretään tangentti pisteeseen, jossa kuvaaja leikkaa $y$-akselin. Mikä tangentin yhtälö on?

**257.** Määritä funktion $f(x) = e^{3x} - 27x$ derivaattafunktion nollakohdat.

**258.** Mikä funktion $f(x) = e^{2x} - 6x$ pienin arvo on?

**259.** Mikä funktion $f(x) = xe^{2x}$ arvojoukko on?

**260.** Osoita, että $e^{3x} > 27e^x - 55$ kaikilla $x$.

**261.** Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - 6x$ derivaattafunktion nollakohdat.
(Ohje: Merkitse derivaattafunktion lausekkeessa $e^x = u$ ja ratkaise ensin $u$.)

**262.** Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ kuvaajaa sanotaan muotonsa (kirkonkello) takia Gaussin kellokäyräksi. Käyrä on tärkeä tilastotieteessä, sillä monien tilastollisten muuttujien kokeellisesti havaittu jakauma asettuu sopivalla asteikonvalinnalla likimain kellokäyrän muotoon. Tällaisia muuttujia ovat muun muassa eräät mittausvirheet sekä jotkin ihmisten ja eliöiden ominaisuudet, kuten samana vuonna syntyneiden suomalaisten tyttövauvojen syntymäpituus. Gaussin kellokäyrän muotoista jakaumaa kutsutaan *normaalijakaumaksi.*
a) Osoita, että Gaussin kellokäyrä on symmetrinen $y$-akselin suhteen.
b) Missä funktio $f$ on kasvava ja missä vähenevä?
c) Minkä muuttujan arvon kohdalla funktion $f$ arvot kasvavat nopeimmin ja minkä muuttujan arvon kohdalla funktion arvot vähenevät nopeimmin?

**263.** Jodin radioaktiivisen isotoopin jodi-131 puoliintumisaika (aika, jossa aineen määrä vähenee radioaktiivisen hajoamisen seurauksena puoleen) on 8,0 vuorokautta. Ydinvoimalaonnettomuuden seurauksena voimalan ympäristöön levinneen aineen määräksi arvioitiin 3,0 kg.
a) Muodosta funktio $m(t)$, joka ilmaisee isotoopin määrän $t$ vuorokauden kuluttua.
b) Millä nopeudella isotoopin määrä vähenee hetkillä $t = 4$ ja $t = 10$?

## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**264.** Derivoi funktio $f(x) = 10^x$. Määritä kolmen numeron tarkkuudella $f'(0)$ ja $f'(3)$.

**265.** Jos jauhelihaa säilytetään huoneenlämmössä, niin lihassa olevien bakteerien määrä 7,9-kertaistuu joka tunti. Bakteerien lukumäärä jauhelihaerässä on nyt 7 500.
a) Muodosta funktio $b(t)$, joka ilmaisee bakteerien määrän $t$ tunnin kuluttua. Anna funktio myös muodossa, jossa kantalukuna on Neperin luku $e$.
b) Millä nopeudella bakteerien määrä lisääntyy hetkillä $t = 1$ ja $t = 5$?

**266.** Suora sivuaa funktion $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$ kuvaajaa. Osoita, että suoran kulmakerroin on sivuamispisteen $x$- ja $y$-koordinaattien tulo.

**267.** Määritä funktion derivaattafunktion nollakohdat.
a) $f(x) = 2x + e^{-x}$ b) $g(x) = x^2e^{-x}$
c) $h(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$

**268.** Suorakulmion kaksi sivua on positiivisilla koordinaattiakseleilla ja yksi kärki käyrällä $y = e^{-x}$.
a) Piirrä kuvio.
b) Mikä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

**269.** Määritä funktion $f(x) = e^{3x} - 12e^{2x}$ derivaattafunktion nollakohdat.

**270.** Osoita, että funktio $f(x) = e^{2x} - 2e^x + x$ on kaikkialla aidosti kasvava.
Katso tehtävän 261 ohjetta.

**271.** Määritä funktion $g(x) = 4e^x + e^{-x}$
a) pienin arvo b) arvojoukko.

**272.** Seikkailupelissä pelihahmo joutuu välttelemään peliin sijoitettuja tuhoajia. Kun etäisyys tuhoajasta kasvaa, tuhovaikutus pienenee eksponentiaalisesti niin, että $x$ metrin etäisyydellä tuhovaikutus on $ke^{-x}$, missä $k$ on tuhoajan koko. Pelihahmon on kuljettava 10,0 metriä leveästä portista, jota vartioi kummassakin portin pylväässä oleva tuhoaja, joista toinen on kahdeksan kertaa niin suuri kuin toinen. Missä kohdassa pylväiden välissä tuhoajien yhteisvaikutus on pienin?

**273.** Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ kuvaajalle piirretään normaali pisteeseen $(a, f(a))$, missä $a \neq 0$. Mitä pistettä normaalin ja $y$-akselin leikkauspiste lähenee, kun $a$ lähenee nollaa?

**274.** Missä kohdassa funktio $g(x) = 2^x - x$ saa pienimmän arvonsa?

**275.** Yhdysvaltain väkiluku vuoden 1991 alussa oli 250 miljoonaa ja vuotuinen väestönkasvu 1,0 %. Venezuelan väkiluku samaan aikaan oli 20 miljoonaa ja vuotuinen väestönkasvu 2,6 %. Oletetaan (epärealistisesti), että väestönkasvu jatkuu samanlaisena.
a) Minä vuonna Yhdysvaltain ja Venezuelan väkilukujen erotus alkaa pienentyä? Kuinka suuret maiden väkiluvut silloin ovat?
b) Minä vuonna Venezuelan väkiluku saavuttaa Yhdysvaltain väkiluvun?

**276.** Eksponenttifunktion $k^x$ (missä $k > 0$ ja $k \neq 1$) kuvaajalle piirretään origon kautta kulkeva tangentti. Osoita, että sivuamispisteen $y$-koordinaatti ei riipu kantaluvusta $k$.

**277.** Derivoi funktio.
a) $3^{x^2}$ b) $3^{2^x}$

# Logaritmifunktion derivaatta

Voidaan osoittaa, että $e$-kantainen logaritmifunktio $\ln x$ on derivoituva koko määrittelyjoukossaan $]0, \infty[$. Seuraavassa johdetaan derivaattafunktion lauseke.

Kun $x > 0$, niin logaritmin määritelmän mukaan

$e^{\ln x} = x$.

Funktioilla $e^{\ln x}$ ja $x$ on siis sama derivaattafunktio. Derivoidaan molemmat funktiot.

| | |
|---|---|
| $\mathrm{D}e^{\ln x} = \mathrm{D}x$ | $\mathrm{D}e^{f(x)} = e^{f(x)}\,\mathrm{D}f(x)$ |
| $e^{\ln x}\,\mathrm{D}\ln x = 1$ | Sijoitetaan $e^{\ln x} = x$. |
| $x\,\mathrm{D}\ln x = 1$ | Ratkaistaan $\mathrm{D}\ln x$. |
| $\mathrm{D}\ln x = \frac{1}{x}$ | |

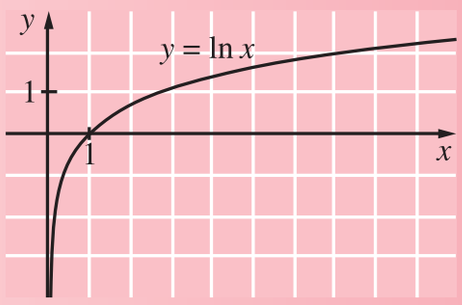
### Funktion $\ln x$ derivaattafunktio

$$\mathrm{D}\ln x = \frac{1}{x},$$

missä $x > 0$.

Muiden logaritmifunktioiden derivoiminen on tehtävänä 308.

### Funktion $\ln x$ ominaisuuksia




- Funktio $\ln x$ on aidosti kasvava koko määrittelyjoukossaan $]0, \infty[$.
- Kun muuttujan arvot suurenevat rajatta, funktion $\ln x$ arvot suurenevat rajatta.
- Kun muuttujan arvot lähestyvät nollaa, funktion $\ln x$ arvot pienenevät rajatta.
- Funktion $\ln x$ arvojoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

## ESIMERKKI 1

Derivoi funktio. a) $3 \ln x$ b) $\ln 3x$ c) $\ln \frac{5}{x}$

**Ratkaisu**

a) $\mathrm{D}(3 \ln x) = 3 \, \mathrm{D} \ln x = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

b) Käytetään tulon logaritmikaavaa $\ln ab = \ln a + \ln b$.

$$\mathrm{D} \ln 3x = \mathrm{D}(\ln 3 + \ln x)$$
$$= \mathrm{D} \ln 3 + \mathrm{D} \ln x \qquad \ln 3 \text{ on vakio.}$$
$$= 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

c) Käytetään osamäärän logaritmikaavaa $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

$$\mathrm{D} \ln \frac{5}{x} = \mathrm{D}(\ln 5 - \ln x) = \mathrm{D} \ln 5 - \mathrm{D} \ln x$$
$$= 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$$

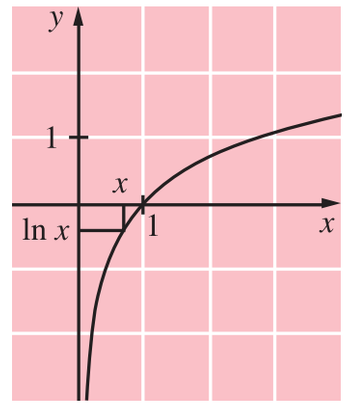
**Vastaus** a) $\frac{3}{x}$ b) $\frac{1}{x}$ c) $-\frac{1}{x}$

## ESIMERKKI 2

Suorakulmion yksi sivu on positiivisella $x$-akselilla, yksi sivu negatiivisella $y$-akselilla ja yksi kärki funktion $\ln x$ kuvaajalla. Mikä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

### Ratkaisu

Funktion $\ln x$ kuvaaja leikkaa $x$-akselin pisteessä $(1, 0)$, sillä $\ln 1 = 0$.




Valitaan muuttujaksi $x$-akselilla olevan sivun toisen päätepisteen $x$-koordinaatti. Kuvaajalla oleva suorakulmion kärki on pisteessä $(x, \ln x)$, joten suorakulmion sivujen pituudet ovat $x$ ja $-\ln x$.
Suorakulmion pinta-ala on

$$A(x) = x(-\ln x) = -x \ln x,$$

missä $x$ on välillä $]0, 1]$.

Määritetään funktion $A(x)$ suurin arvo.

Derivoidaan funktio $A(x) = -x \ln x$.

$$A'(x) = -1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x} \qquad \mathrm{D}(fg) = f'g + fg'$$

$$= -\ln x - 1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-\ln x - 1 = 0$$

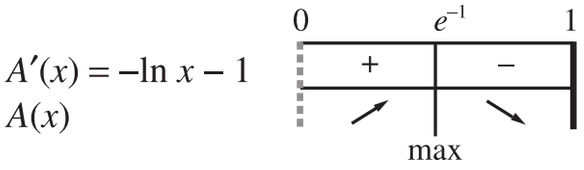
$$\ln x = -1$$

Luku, jonka $e$-kantainen logaritmi on $-1$, on $e^{-1}$.

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$$

Laaditaan derivaattafunktion $A'(x) = -\ln x - 1$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion $A$ kulkukaavioksi.

$A'(0{,}1) = -\ln 0{,}1 - 1 \approx 1{,}3 > 0$
$A'(0{,}5) = -\ln 0{,}5 - 1 \approx -0{,}31 < 0$




Funktio $A(x) = -x \ln x$ saa suurimman arvon kohdassa $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Suurin arvo on

$A(e^{-1}) = -\frac{1}{e} \ln e^{-1} = -\frac{1}{e} \cdot (-1) = \frac{1}{e}$.

**Vastaus** $\frac{1}{e} \approx 0{,}37$

Johdetaan derivointikaava funktioille, jotka ovat muotoa $\ln f(x)$, missä $f(x) > 0$.

Funktio $\ln f(x)$ on yhdistetty funktio $g(f(x))$, missä ulkofunktio $g(x) = \ln x$.

Sovelletaan yhdistetyn funktion derivointisääntöä

$\mathrm{D}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$. Ulkofunktion $g$ derivaatta kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion $f$ derivaatalla $f'(x)$.

Ulkofunktion $g(x) = \ln x$ derivaatta on $g'(x) = \frac{1}{x}$. Siis

$\mathrm{D} \ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$. Ulkofunktion $\ln x$ derivaatta $\frac{1}{x}$ kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $f'(x)$.

### Funktion ln $f(x)$ derivaattafunktio

Jos funktio $f(x)$ on derivoituva ja $f(x) > 0$, niin

$$\mathrm{D}\ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x).$$

Kaava voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\mathrm{D}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

## ESIMERKKI 3

Derivoi funktio a) $\ln(e^x + 1)$ b) $\ln(3 - x)$.
Mikä funktion määrittelyjoukko on?

**Ratkaisu**

a) Funktion $\ln(e^x + 1)$ sisäfunktio on $f(x) = e^x + 1$.

$$\mathrm{D}\ln(e^x + 1) = \frac{1}{e^x + 1} \cdot \mathrm{D}(e^x + 1) \qquad \mathrm{D}\ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$= \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Koska $e^x + 1 > 0$ kaikilla muuttujan arvoilla, funktion $\ln(e^x + 1)$ määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

b) $$\mathrm{D}\ln(3 - x) = \frac{1}{3 - x} \cdot \mathrm{D}(3 - x) \qquad \mathrm{D}\ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$= \frac{1}{3 - x} \cdot (-1) = -\frac{1}{3 - x}$$

Funktio $\ln(3 - x)$ on määritelty, kun $3 - x > 0$ eli $x < 3$.

**Vastaus**

a) $\dfrac{e^x}{e^x + 1}$, määrittelyjoukko $\mathbb{R}$

b) $-\dfrac{1}{3 - x}$, määrittelyjoukko $]-\infty, 3[$

## ESIMERKKI 4

Missä funktio $f(x) = \ln(x^2 + 9) - \ln x$ on kasvava ja missä vähenevä?

**Ratkaisu**

Funktio $f$ on määritelty, kun $x^2 + 9 > 0$ ja $x > 0$. Ensimmäinen epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan arvoilla. Funktion $f$ määrittelyjoukko on $]0, \infty[$.

Tutkitaan funktion $f$ derivaattafunktion merkit.

Derivoidaan funktio $f(x) = \ln(x^2 + 9) - \ln x$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 9} \cdot \mathrm{D}(x^2 + 9) - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 9} \cdot 2x - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2x}{x^2 + 9} - \frac{1}{x}$$ Lavennetaan samannimisiksi.

$$= \frac{2x^2}{x(x^2 + 9)} - \frac{x^2 + 9}{x(x^2 + 9)}$$ Suoritetaan vähennyslasku.

$$= \frac{2x^2 - (x^2 + 9)}{x(x^2 + 9)}$$

$$= \frac{x^2 - 9}{x(x^2 + 9)}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{x^2 - 9}{x(x^2 + 9)} = 0$$ Murtolausekkeen arvo on nolla, kun osoittaja on nolla.

$$x^2 - 9 = 0$$

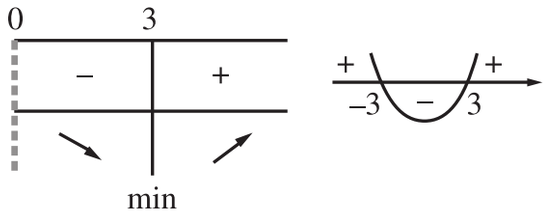
$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ tai } x = -3$$

Luku $-3$ ei kuulu funktion $f$ määrittelyjoukkoon. Derivaattafunktion ainoa nollakohta on $3$.

Derivaattafunktion nimittäjänä oleva lauseke $x(x^2 + 9)$ on funktion $f$ koko määrittelyjoukossa $]0, \infty[$ positiivinen. Derivaattafunktion merkki riippuu vain osoittajan $x^2 - 9$ merkistä. Funktion $x^2 - 9$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x(x^2 + 9)}$$




$f(x)$

min

Funktio $f$ on aidosti vähenevä välillä $]0, 3]$ ja aidosti kasvava välillä $[3, \infty[$.

**Vastaus** aidosti vähenevä välillä $]0, 3]$ ja aidosti kasvava välillä $[3, \infty[$

# TEHTÄVIÄ

## SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**278.** Derivoi funktio.

a) $5 \ln x$ b) $\ln 5x$ c) $\frac{\ln x}{3}$

d) $\ln \frac{x}{3}$ e) $\frac{\ln 6x}{3}$

**279.** Derivoi.

a) $\ln \frac{3}{x}$ b) $\ln \frac{3}{5x}$ c) $\ln x^3$

**280.** Määritä funktion derivaattafunktion nollakohdat.

a) $f(x) = x^2 \ln x$ b) $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

**281.** Missä funktio $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ on kasvava ja missä vähenevä? Mikä funktion $f$ suurin arvo on?

**282.** Käyrälle $y = \ln x$ piirretään suoran $y = 2x$ suuntainen tangentti. Missä pisteessä tangentti sivuaa käyrää? Mikä tangentin yhtälö on?

**283.** a) Missä pisteessä funktion $f(x) = \ln x - 1$ kuvaaja leikkaa $x$-akselin?
b) Suorakulmion yksi sivu on positiivisella $x$-akselilla, yksi sivu negatiivisella $y$-akselilla ja yksi kärki funktion $f(x) = \ln x - 1$ kuvaajalla. Mikä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

**284.** Osoita, että $x - 1 \geqslant \ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}$ funktion $\ln x$ koko määrittelyjoukossa. (Ohje: Osoita kumpikin epäyhtälö erikseen todeksi.)

**285.** Derivoi funktio

a) $(\ln x)^2$ b) $\frac{1}{\ln x}$.

Mikä b-kohdan funktion määrittelyjoukko on?

**286.** Määritä funktion määrittelyjoukko ja derivoi funktio.

a) $\ln (x^4 + 3)$ b) $\ln (3 - 2x)$

**287.** Derivoi funktio $f(x) = \ln \frac{x^2}{1 - x}$.

(Ohje: Käytä ensin logaritmikaavoja.)

**288.** Määritä funktion $f(x) = \ln x + \ln (3 - x)$ suurin arvo.

**289.** Missä funktio $f(x) = \ln (x^2 + 12) - \frac{\ln x}{2}$ on kasvava ja missä vähenevä?

**290.** Kuinka monta juurta yhtälöllä $\ln (x - 1) = 3 \ln x - 3$ on? Määritä juurien likiarvot kahden desimaalin tarkkuudella.

## SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**291.** Derivoi funktio.

a) $4 \ln x$ b) $\ln 8x$ c) $\frac{\ln 8x}{2}$

**292.** Derivoi.

a) $\ln \frac{1}{x}$ b) $6 \ln \frac{1}{2x}$

**293.** Derivoi.

a) $\ln x^2$ $(x > 0)$ b) $\ln \sqrt{x}$ c) $\ln \sqrt[3]{x}$

**294.** Määritä funktion derivaattafunktion nollakohdat.

a) $f(x) = x + x \ln x$ b) $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$

**295.** Määritä funktion $f(x) = x - 2 \ln x$ suurin ja pienin arvo välillä $[\frac{3}{2}, e]$.

**296.** Mikä funktion $g(x) = \dfrac{6}{x} + 2 \ln x$ arvojoukko on?

**297.** Esimerkin 2 nelikulmio pyörähtää
a) $y$-akselin b) $x$-akselin ympäri.
Mikä muodostuvan ympyrälieriön suurin mahdollinen tilavuus on?

**298.** Päteekö epäyhtälö funktion $\ln x$ koko määrittelyjoukossa?

a) $\ln x < \sqrt{x}$ b) $\ln x < \sqrt[3]{x}$

**299.** Osoita, että funktioiden $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$ ja $g(x) = \ln x$ kuvaajat leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

**300.** Derivoi funktio.

a) $\ln (3x + 1)$ b) $\ln (e^{-x} + 1)$

c) $\ln (\sqrt{x} + 1)$

**301.** Mikä funktion $\ln(\ln x)$ määrittelyjoukko on? Derivoi funktio.

**302.** Mikä funktion $f(x) = \ln \dfrac{4 - x^2}{4 + x^2}$ määrittelyjoukko on? Derivoi funktio $f$.

**303.** Määritä funktion
$f(x) = \ln (x^2 + 3) - \ln (x - 1)$ derivaattafunktion nollakohdat.

**304.** Kuinka monta juurta yhtälöllä
$5x + \ln (x - 2) = 0$ on?

**305.** Funktion $f(x) = x^x$ tutkiminen derivaatan avulla on mahdollista, kun funktio kirjoitetaan muotoon $f(x) = e^{g(x)}$. Kirjoita funktio tällaiseen muotoon ja tutki,
a) missä funktio $f$ on kasvava ja missä vähenevä
b) onko funktiolla suurin tai pienin arvo. Missä kohdassa funktio $f$ saa suurimman ja pienimmän arvon?

**306.** Onko funktiolla $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, missä $x > 0$, suurin tai pienin arvo? Missä kohdassa funktio $f$ saa suurimman ja pienimmän arvon?

**307.** Millä muuttujan arvolla funktio
$f(x) = x^{x^2}$, missä $x > 0$, saa pienimmän arvon? Mikä funktion $f$ pienin arvo on?

**308.** Muodosta funktion $\log_k x$ derivoimiskaava.
(Ohje: Voit edetä kuten johdettaessa funktion $\ln x$ derivointikaavaa ilmaisemalla $x$ ensin $k$:n potenssina tai voit ilmaista $k$-kantaisen logaritmin $\log_k x$ luonnollisen logaritmin $\ln x$ avulla.)

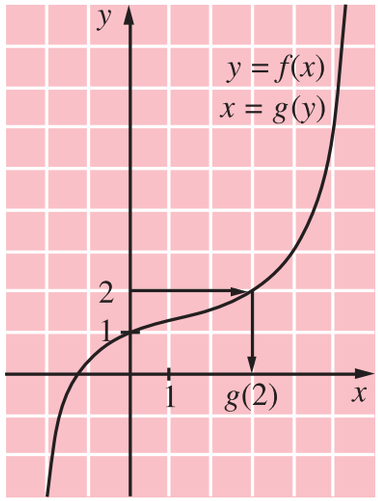
**309.** Määritä funktion $f(x) = \ln (1 + x)$ Taylorin polynomit $T_2(x)$ ja $T_3(x)$ (katso tehtävä 230 sivulla 97). Piirrä polynomit samaan graafisen laskimen näyttöön funktion $\ln (1 + x)$ kuvaajan kanssa.

**310.** Tehtävän 284 ensimmäisestä epäyhtälöstä seuraa, että kaikilla positiivisilla muuttujan arvoilla on $\ln x < x$ eli $\ln x < x^1$. Tehtävän 298 mukaan on myös $\ln x < x^{\frac{1}{2}}$, mutta samassa tehtävässä nähtiin, että vastaava epäyhtälö $\ln x < x^{\frac{1}{3}}$ ei enää pädekään kaikilla muuttujan arvoilla. Millä positiivisilla eksponentin arvoilla $r$ on $\ln x < x^r$ kaikilla $x > 0$?

# Käänteisfunktio

**Ongelma**

Kuviossa on erään funktion $f$ kuvaaja. Kuvaajasta voidaan lukea myös toisen funktion $g$ arvoja: muuttujan arvot ovat $y$-akselilla ja funktion $g$ arvot $x$-akselilla. Esimerkiksi $g(2) = 3$.

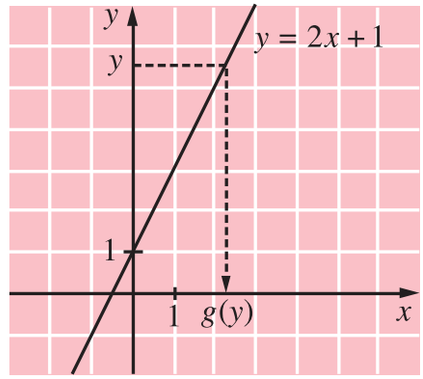



a) Määritä funktion $g$ arvot $g(6)$, $g(3)$ ja $g(1)$.
b) Määritä $g(f(4))$, $g(f(2))$ ja $g(f(x))$.
c) Määritä $f(g(3))$, $f(g(4))$ ja $f(g(y))$.

## JOHDANTOESIMERKKI 1

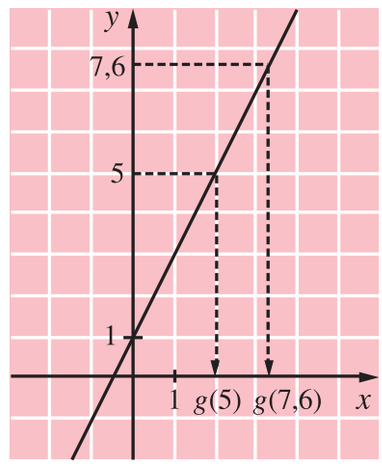
Kuviossa on funktion $f(x) = 2x + 1$ kuvaaja. Kuvaajasta voidaan lukea myös toisen funktion $g$ arvoja: muuttujan arvot ovat $y$-akselilla ja funktion $g$ arvot $x$-akselilla.

a) Määritä $g(5)$ ja $g(7{,}6)$.
b) Määritä funktion $g(y)$ lauseke.
c) Määritä $g(f(x))$ ja $f(g(y))$.




### Ratkaisu

a) Kuviosta nähdään suoraan, että $g(5) = 2$. Tulos voidaan tarkistaa: $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.




Arvo $g(7{,}6)$ ei näy tarkasti kuvaajasta. Arvo $g(7{,}6)$ on sellainen muuttujan $x$ arvo, että $f(x) = 7{,}6$.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 7{,}6 && f(x) = 7{,}6 \\ 2x &= 6{,}6 && \mid : 2 \\ x &= 3{,}3 \end{aligned}$$

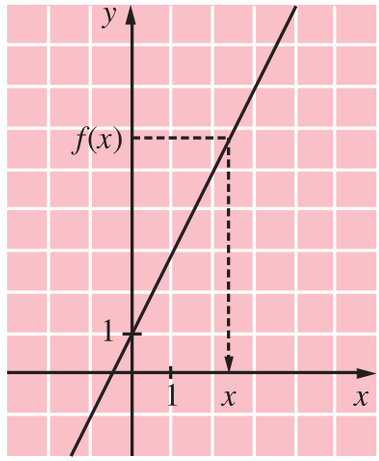
Siis $g(7{,}6) = 3{,}3$.

b) Funktion $g$ arvo $g(y)$ on sellainen muuttujan $x$ arvo, että $f(x) = y$. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

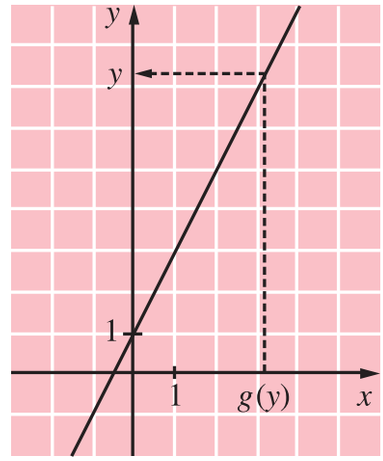
$$\begin{aligned} 2x + 1 &= y && f(x) = y \\ 2x &= y - 1 && \mid : 2 \\ x &= \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} && x = g(y) \end{aligned}$$

Siis $g(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$.

c) Funktion $g$ määritelmästä seuraa, että $g(f(x)) = x$ ja $f(g(y)) = y$.




Funktion $g$ arvo kohdassa $f(x)$ on $x$ eli $g(f(x)) = x$.




Funktion $f$ arvo kohdassa $g(y)$ on $y$ eli $f(g(y)) = y$.

Samaan tulokseen päästään myös laskemalla.

$$g(f(x)) = g(2x + 1) = \frac{1}{2}(2x + 1) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = x$$

$$f(g(y)) = f(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}) + 1 = y - 1 + 1 = y$$

**Vastaus**

a) $g(5) = 2$ ja $g(7{,}6) = 3{,}3$

b) $g(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$

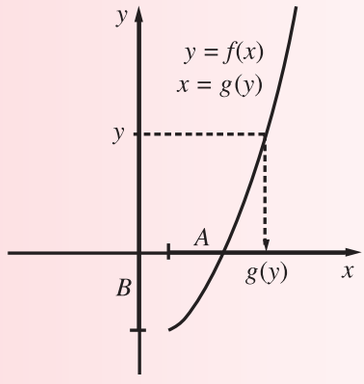
c) $g(f(x)) = x$ ja $f(g(y)) = y$

## Käänteisfunktio

Oletetaan, että funktio $f$ saa jokaisen arvonsa vain yhdessä määrittelyjoukkonsa $A$ kohdassa.
Jos luku $y$ kuuluu funktion $f$ arvojoukkoon $B$, niin yhtälöllä $f(x) = y$ on tällöin yksikäsitteinen ratkaisu. Määrittelemällä:

$g(y)$ on yhtälön $f(x) = y$ ratkaisu,

saadaan funktio $g$.




Funktio $g$ on funktion $f$ *käänteisfunktio.*

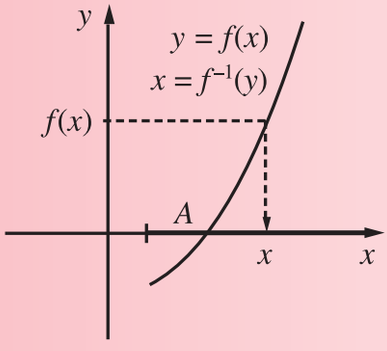
Funktion $f$ *käänteisfunktiota* merkitään $f^{-1}$.

Siis

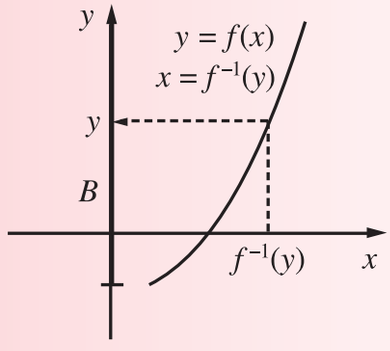
$x = f^{-1}(y)$, jos ja vain jos $f(x) = y$.

Funktio $f$ ja sen käänteisfunktio $f^{-1}$ kumoavat toisensa:

$f^{-1}(f(x)) = x$ ja $f(f^{-1}(y)) = y$.




Funktion $f^{-1}$ arvo kohdassa $f(x)$ on $x$ eli $f^{-1}(f(x)) = x$.




Funktion $f$ arvo kohdassa $f^{-1}(y)$ on $y$ eli $f(f^{-1}(y)) = y$.

Aidosti kasvava tai aidosti vähenevä funktio saa jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa. Siis:

## Monotonisuus ja käänteisfunktio

Jos funktio $f$ on määrittelyjoukossaan aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, funktiolla $f$ on käänteisfunktio $f^{-1}$. Käänteisfunktion $f^{-1}$ määrittelyjoukko on funktion $f$ arvojoukko.

## ESIMERKKI 2

Onko funktiolla käänteisfunktio? Mikä funktion käänteisfunktio on?

a) $f(x) = x^2$

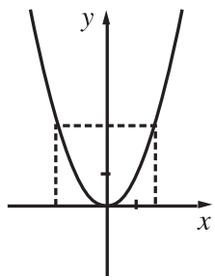
b) $f(x) = x^2$, missä $x \geqslant 0$

c) $f(x) = x^3$

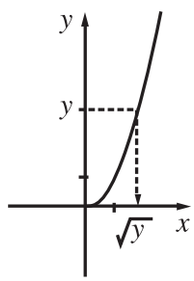
d) $f(x) = 2^x$

### Ratkaisu

a) Funktio $f(x) = x^2$ saa kaikki muut arvonsa paitsi arvon $0$ kahdessa eri kohdassa. Funktiolla ei ole käänteisfunktiota.




b) Kun funktion $f(x) = x^2$ määrittelyjoukoksi rajataan väli $[0, \infty[$, funktio on koko määrittelyjoukossaan aidosti kasvava, joten funktiolla $f$ on käänteisfunktio $f^{-1}$.

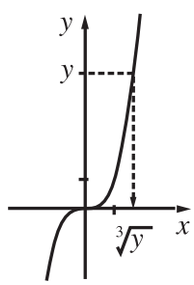



Kun $x \geqslant 0$, niin yhtälön $x^2 = y$ ratkaisu on $x = \sqrt{y}$.

Siis $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Käänteisfunktion määrittelyjoukko on funktion $f$ arvojoukko $[0, \infty[$.

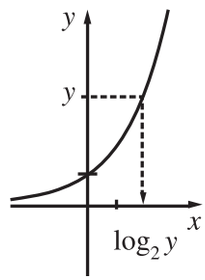
c) Funktio $f(x) = x^3$ on koko määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}$ aidosti kasvava, joten funktiolla $f$ on käänteisfunktio.




Yhtälön $x^3 = y$ ratkaisu on $x = \sqrt[3]{y}$, joten $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Käänteisfunktion määrittelyjoukko on funktion $f$ arvojoukko $\mathbb{R}$.

d) Funktio $f(x) = 2^x$ on koko määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}$ aidosti kasvava, joten funktiolla $f$ on käänteisfunktio.




Yhtälön $2^x = y$ ratkaisu on $x = \log_2 y$, joten $f^{-1}(y) = \log_2 y$.

Käänteisfunktion määrittelyjoukko on funktion $f$ arvojoukko $]0, \infty[$.

**Vastaus**

a) Ei ole.

b) On, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, missä $y \geqslant 0$.

c) On, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

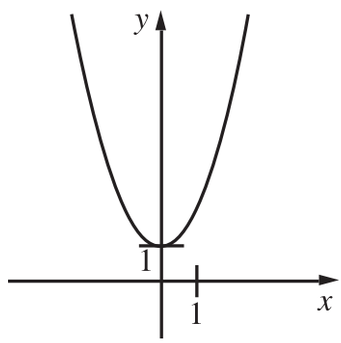
d) On, $f^{-1}(y) = \log_2 y$, missä $y > 0$.

## ESIMERKKI 3

a) Osoita, että funktiolla $f(x) = x^2 + 1$, missä $x \geqslant 0$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion $f^{-1}$ määrittelyjoukko on?
b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke. Vaihda käänteisfunktion muuttujaksi $x$ ja piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ kuvaajat.

**Ratkaisu**

a) Funktion $x^2 + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on $y$-akselilla pisteessä $(0, 1)$.




Kun funktion $x^2 + 1$ määrittelyjoukoksi rajataan väli $[0, \infty[$, saadaan funktio, joka on aidosti kasvava koko määrittelyjoukossaan. Siis funktiolla $f(x) = x^2 + 1$, missä $x \geqslant 0$, on käänteisfunktio.

Käänteisfunktion $f^{-1}$ määrittelyjoukko on funktion $f$ arvojoukko $[1, \infty[$.

b) Käänteisfunktion arvo $f^{-1}(y)$ on yhtälön $f(x) = y$ ratkaisu. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$x^2 + 1 = y \qquad f(x) = y$$

$$x^2 = y - 1$$

$$x = \sqrt{y-1} \text{ tai } x = -\sqrt{y-1}$$

Koska $x \geqslant 0$, niin $x = \sqrt{y-1}$.

Siis $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$, missä $y \geqslant 1$.

Vaihdetaan muuttujaksi $x$, jolloin

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

Funktion $f(x) = x^2 + 1$, missä $x \geqslant 0$, kuvaajan piirtämiseksi taulukoidaan funktion arvoja.

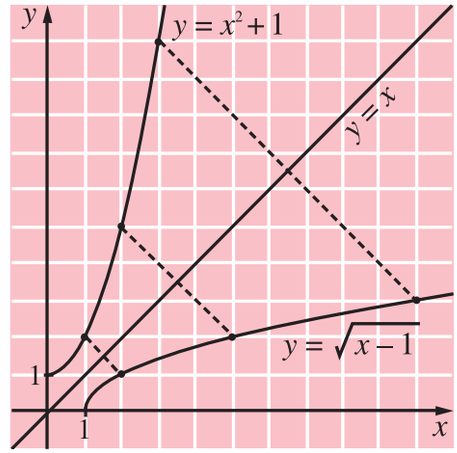
| $x$ | $f(x) = x^2 + 1$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | (0, 1) |
| 1 | 2 | (1, 2) |
| 2 | 5 | (2, 5) |
| 3 | 10 | (3, 10) |

Käänteisfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ arvoja voidaan laskea tai niitä voidaan suoraan lukea edellisestä taulukosta, sillä $f^{-1}(f(x)) = x$.

| $x$ | $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | (1, 0) |
| 2 | 1 | (2, 1) |
| 5 | 2 | (5, 2) |
| 10 | 3 | (10, 3) |

Käänteisfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ kuvaajan pisteet saadaan funktion $f(x) = x^2 + 1$, missä $x \geqslant 0$, kuvaajan pisteistä vaihtamalla pisteiden $x$- ja $y$-koordinaatit keskenään.

Käänteisfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ kuvaaja on funktion $f(x) = x^2 + 1$, missä $x \geqslant 0$, kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.




**Vastaus**

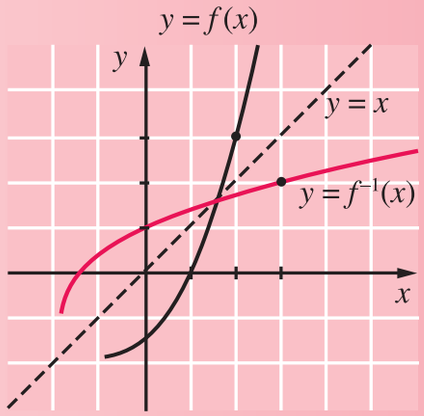
a) määrittelyjoukko $[1, \infty[$

b) $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$, missä $y \geqslant 1$

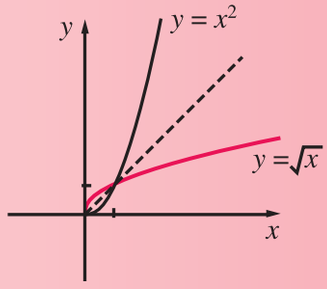
## Käänteisfunktion kuvaaja

Jos funktion $f(x)$ käänteisfunktion $f^{-1}$ muuttujana on $x$, niin funktion $f^{-1}(x)$ kuvaaja saadaan funktion $f(x)$ kuvaajasta vaihtamalla kuvaajan pisteiden $x$- ja $y$-koordinaatit keskenään.

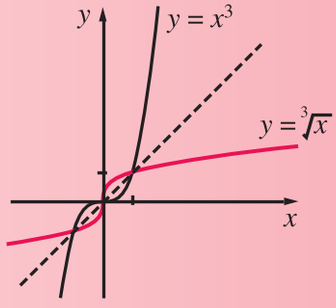
Käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaaja on funktion $f(x)$ kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.



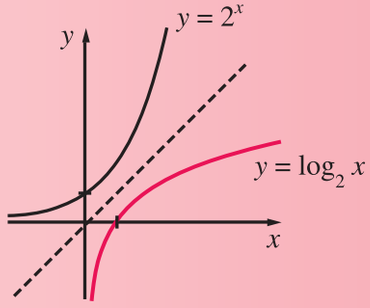

Neliöjuurifunktion $\sqrt{x}$ kuvaaja saadaan peilaamalla paraabelin $y = x^2$ haara, jossa $x \geqslant 0$, suoran $y = x$ suhteen.




Kuutiojuurifunktion $\sqrt[3]{x}$ kuvaaja on funktion $x^3$ kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.




Funktion $\log_2 x$ kuvaaja on funktion $2^x$ kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.




Joillakin graafisilla laskimilla voidaan funktion kuvaaja peilata käänteisfunktion kuvaajaksi.

## ESIMERKKI 4

a) Osoita, että funktiolla $f(x) = x^5 + 2x - 1$ on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on?
b) Määritä käänteisfunktion arvo $f^{-1}(2)$ ja käänteisfunktion nollakohta.
c) Määritä kahden desimaalin tarkkuudella käänteisfunktion arvo $f^{-1}(0)$.

### Ratkaisu

a) Funktion $f$ määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Selvitetään funktion $f$ kulku derivaatan avulla.

Koska

$f'(x) = 5x^4 + 2 \geqslant 0 + 2 > 0$ kaikilla $x$,

niin funktio $f$ on kaikkialla aidosti kasvava. Siis funktiolla $f$ on käänteisfunktio.

Käänteisfunktion $f^{-1}$ määrittelyjoukko on funktion $f$ arvojoukko. Kun muuttujan $x$ arvot suurenevat rajatta, funktion $f(x) = x^5 + 2x - 1$ arvot suurenevat rajatta. Kun muuttujan $x$ arvot pienevät rajatta, funktion $f$ arvot pienenevät rajatta. Funktion $f$ arvojoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Siis käänteisfunktion määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

b) Viidennen asteen yhtälöstä

$x^5 + 2x - 1 = y$ $\qquad f(x) = y$

ei osata ratkaista muuttujaa $x$, joten käänteisfunktiolle $f^{-1}$ ei saada lauseketta.

Myöskään ei osata ratkaista yhtälöä

$x^5 + 2x - 1 = 2.$ $\qquad f(x) = 2$

Huomataan kuitenkin, että

$f(1) = 1^5 + 2 \cdot 1 - 1 = 2,$

joten $f^{-1}(2) = 1.$

Koska

$f(0) = 0^5 + 2 \cdot 0 - 1 = -1,$

niin $f^{-1}(-1) = 0.$

Siis käänteisfunktion $f^{-1}$ nollakohta on $-1$.

c) On löydettävä likiarvo käänteisfunktion arvolle $f^{-1}(0)$ eli sellaiselle muuttujan arvolle $x_0$, että $f(x_0) = 0$.

Määritetään likiarvo haarukoimalla.

Edellä on laskettu, että $f(0) = -1$ ja $f(1) = 2$, joten $x_0$ on välillä $]0, 1[$. Kaventamalla väliä, jolla funktio $f(x) = x^5 + 2x - 1$ vaihtaa merkkiään, saadaan:

$f(0{,}48) \approx -0{,}015 < 0$

$f(0{,}49) \approx 0{,}008 > 0$ $\quad x_0$ on välillä $]0{,}48;\ 0{,}49[$.

$f(0{,}485) \approx -0{,}003 < 0$ $\quad x_0$ on välillä $]0{,}485;\ 0{,}49[$.

Kahden desimaalin tarkkuudella $x_0 \approx 0{,}49$. Siis $f^{-1}(0) \approx 0{,}49$.

**Vastaus**

a) Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.
b) $f^{-1}(2) = 1$, nollakohta $-1$
c) 0,49

# TEHTÄVIÄ

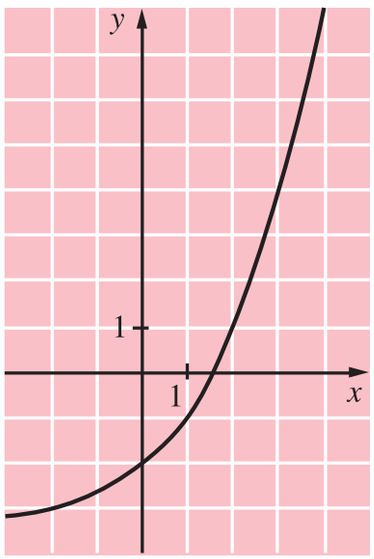
## SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

**311.** Kuviossa on välillä $[-3, \infty[$ määritellyn aidosti kasvavan funktion $f$ kuvaaja.

a) Määritä kuvaajasta funktion $f$ käänteisfunktion $f^{-1}$ arvot
$f^{-1}(8)$, $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(-1)$,
$f^{-1}(-2)$ ja $f^{-1}(-3)$.

b) Määritä $f^{-1}(f(3))$ ja $f^{-1}(f(-1))$.

c) Määritä $f(f^{-1}(1))$ ja $f(f^{-1}(6))$.




**312.** Taulukossa on erään funktion $f$ arvoja. Tiedetään, että funktiolla $f$ on käänteisfunktio. Täydennä toinen taulukko funktion $f$ käänteisfunktion $f^{-1}$ arvoilla.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-7$ | 6 |
| $-4$ | 4 |
| $-1$ | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | $-1$ |
| 3 | $-2$ |
| 6 | $-4$ |

| $y$ | $f^{-1}(y)$ |
|---|---|
| $-4$ | |
| $-1$ | |
| 1 | |
| 4 | |

**313.** Onko funktiolla $f(x)$ käänteisfunktio? Mikä funktion käänteisfunktio on?

a) $f(x) = x^4$

b) $f(x) = x^4$, missä $x \geqslant 0$

c) $f(x) = x^5$

d) $f(x) = e^x$

**314.** a) Osoita, että funktiolla $f(x) = x^2 - 4$, missä $x \geqslant 0$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on?

b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke.

c) Piirrä funktion $f(x)$ ja käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaajat.

**315.** a) Osoita, että funktiolla $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ on koko reaalilukujen joukossa määritelty käänteisfunktio.

b) Muodosta käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ lauseke. Tarkista sieventämällä lausekkeet $f(f^{-1}(x))$ ja $f^{-1}(f(x))$.

c) Piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ kuvaajat.

**316.** Osoita, että funktiolla $g(x) = \ln(x + 1)$ on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on? Määritä käänteisfunktion $g^{-1}(x)$ lauseke ja piirrä funktioiden $g(x)$ ja $g^{-1}(x)$ kuvaajat samaan koordinaatistoon.

**317.** a) Osoita, että funktio $f(x) = (x - 2)^2$ on aidosti vähenevä, kun $x \leqslant 2$, ja aidosti kasvava, kun $x \geqslant 2$.

b) Määritä funktion $f(x) = (x - 2)^2$, missä $x \leqslant 2$, käänteisfunktio $f^{-1}(y)$.

c) Määritä funktion $f(x) = (x - 2)^2$, missä $x \geqslant 2$, käänteisfunktio $f^{-1}(y)$.

**318.** a) Määritä mahdollisimman suuri sellainen luvun nolla sisältävä väli $A$, että välille $A$ rajatulla funktiolla $f(x) = (x + 1)e^x$ on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion $f^{-1}$ määrittelyjoukko tällöin on?

b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}$ nollakohta ja arvo kohdassa 0.

**319.** a) Osoita, että funktiolla $f(x) = x^5 + x^3 + 3$ on koko reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ määritelty käänteisfunktio.

b) Määritä käänteisfunktion nollakohta.

c) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}$ arvo kohdissa 1 ja 5.

d) Määritä kahden desimaalin tarkkuudella käänteisfunktion arvo $f^{-1}(4)$.

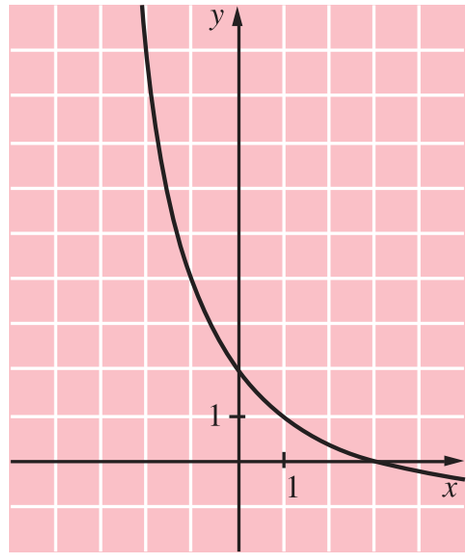
## SARJA II.
## PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

**320.** Kuviossa on aidosti vähenevän funktion $g$ kuvaaja.

a) Määritä kuvaajasta käänteisfunktion $g^{-1}$ arvot $g^{-1}(9)$, $g^{-1}(4)$, $g^{-1}(2)$, $g^{-1}(1)$ ja $g^{-1}(0)$.

b) Määritä $g(g^{-1}(4))$ ja $g(g^{-1}(6))$.

c) Määritä $g^{-1}(g(-1))$ ja $g^{-1}(g(\sqrt{2}))$.




**321.** Onko funktiolla $f(x)$ käänteisfunktio? Mikä funktion käänteisfunktio on?

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = x^2 - 1$, missä $x \geqslant 0$

c) $f(x) = x^3 + 8$

d) $f(x) = \log_3 x$

**322.** a) Osoita, että funktiolla $f(x) = -3x + 6$ on koko reaalilukujen joukossa määritelty käänteisfunktio.

b) Muodosta käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ lauseke. Tarkista sieventämällä yhdistettyjen funktioiden $f(f^{-1}(x))$ ja $f^{-1}(f(x))$ lausekkeet.

c) Piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ kuvaajat.

**323.** a) Osoita, että funktiolla $f(x) = 2 - x^2$, missä $x \leqslant 0$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on?
b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ lauseke ja piirrä funktioiden $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ kuvaajat samaan koordinaatistoon.

**324.** Osoita, että funktiolla $g(x) = e^{\frac{x}{2}} + 1$ on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on? Määritä käänteisfunktion $g^{-1}(x)$ lauseke.

**325.** a) Osoita, että funktiolla $f(x) = \ln(1 + \sqrt{x})$, missä $x \geqslant 0$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on?
b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ lauseke.

**326.** a) Määritä mahdollisimman suuri sellainen luvun nolla sisältävä väli $A$, että välille $A$ rajatulla funktiolla $f(x) = xe^x$ on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion $f^{-1}$ määrittelyjoukko tällöin on?
b) Määritä kahden desimaalin tarkkuudella käänteisfunktio arvo $f^{-1}(1)$.

**327.** a) Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 + x - 1$ on koko reaalilukujen joukossa määritelty käänteisfunktio.
b) Määritä käänteisfunktion nollakohta ja arvot $f^{-1}(-3)$ ja $f^{-1}(9)$.
c) Määritä kahden desimaalin tarkkuudella käänteisfunktion $f^{-1}$ arvo kohdassa 0.

**328.** Osoita, että funktiolla on käänteisfunktio. Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ lauseke.
a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, missä $x \leqslant 1$
b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, missä $x \geqslant 1$

**329.** Osoita, että funktiolla $f(x) = e^{2x} + 2e^x$ on käänteisfunktio, ja määritä käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ lauseke.

**330.** Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 + x - 8$ on käänteisfunktio. Missä pisteissä funktion $f(x)$ ja käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaajat leikkaavat toisensa? Kuinka suuressa kulmassa kuvaajat leikkaavat?

**331.** Laskimessa on näppäimet niin sanotuille *hyperbolisille funktioille* $\sinh x$ ja $\cosh x$. Funktiot $\sinh x$ ja $\cosh x$ määritellään eksponenttifunktion avulla:*

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{ ja } \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

a) Osoita, että funktiolla $\sinh x$ on käänteisfunktio. Käänteisfunktiota merkitään $\operatorname{arsinh} x$. Mikä funktion $\operatorname{arsinh} x$ määrittelyjoukko on?
b) Osoita, että funktiolla $\cosh x$, missä $x \geqslant 0$, on käänteisfunktio. Käänteisfunktiota merkitään $\operatorname{arcosh} x$. Mikä funktion $\operatorname{arcosh} x$ määrittelyjoukko on?**
c) Määritä funktioiden $\operatorname{arsinh} x$ ja $\operatorname{arcosh} x$ lausekkeet.
d) Derivoi funktiot $\operatorname{arsinh} x$ ja $\operatorname{arcosh} x$.

---

* Funktioilla $\sinh x$ ja $\cosh x$ on niin sanotussa hyperbolisessa geometriassa vastaava merkitys kuin funktioilla $\sin x$ ja $\cos x$ tavallisessa geometriassa. Funktion $\cosh x$ kuvaaja on niin sanottu ketjukäyrä: päistään ripustettu ketju tai venymätön köysi asettuu (sopivalla asteikonvalinnalla) funktion $\cosh x$ kuvaajan muotoon.

** Funktioita $\operatorname{arsinh} x$ ja $\operatorname{arcosh} x$ kutsutaan areafunktioiksi. Niiden arvoja voi laskea useimmilla laskimilla (näppäimet [sinh⁻¹] ja [cosh⁻¹]).

# Kertaus

Tässä luvussa kerrataan koko kurssi yksityiskohtaisten esimerkkien avulla. Teorian ja menetelmien kertauksen jälkeen on kertaustehtäviä, jotka ovat samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä. Kertausluku päättyy tehtäväsarjoihin, jotka sisältävät pääosin vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta.

## Juurifunktiot

Juurifunktio $\sqrt[n]{x}$, jossa positiivinen kokonaisluku $n$ on pariton, on määritelty kaikilla muuttujan $x$ arvoilla.

Funktio $\sqrt[3]{5-x}$ on määritelty kaikilla muuttujan $x$ arvoilla.

Juurifunktio $\sqrt[n]{x}$, jossa $n$ on parillinen, on määritelty, kun $x \geqslant 0$.

Funktio $\sqrt[4]{5-x}$ on määritelty, kun $5 - x \geqslant 0$ eli kun $x \leqslant 5$.

Ratkaistaan yhtälö $x + \sqrt{x+10} = 2$.

Yhtälö on määritelty, kun $x + 10 \geqslant 0$ eli kun $x \geqslant -10$.

Neliöjuuriyhtälöä ratkaistaessa yhtälö saatetaan ensin muotoon, jossa neliöjuuri on yksinään toisella puolella.

$$x + \sqrt{x+10} = 2$$

$$\sqrt{x+10} = 2 - x$$

Jotta yhtälö säilyisi neliöönkorotuksessa yhtäpitävänä, yhtälön molempien puolien tulee olla samanmerkkiset. Yhtäpitävyys taataan muotoilemalla neliöönkorotusehto.

Koska yhtälön vasen puoli on aina epänegatiivinen, myös oikean puolen tulee olla epänegatiivinen. Neliöönkorotusehto on $2 - x \geqslant 0$ eli $x \leqslant 2$.

$$x + 10 = (2 - x)^2$$

$$x + 10 = 4 - 4x + x^2$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

Ratkaisukaavalla: $x = -1$ tai $x = 6$

Luku $x = -1$ toteuttaa sekä määrittelyehdon että neliöönkorotusehdon. Yhtälön ratkaisu on $x = -1$.

Jos neliöönkorotusehtoa ei käytetä, niin saadut juuret on tarkistettava sijoittamalla ne johonkin neliöönkorotusta edeltävään yhtälön muotoon.

Kun yhtälöön $x + \sqrt{x+10} = 2$ sijoitetaan $x = -1$, saadaan $-1 + 3 = 2$. Kun sijoitetaan $x = 6$, saadaan $6 + 4 = 2$. Luku $-1$ toteuttaa yhtälön, luku $6$ ei toteuta.
Yhtälön ratkaisu on $x = -1$.

## Juurifunktioiden derivaatta

Jokainen funktio $x^r$, missä $r$ on rationaaliluku, derivoidaan kaavalla

$$\mathrm{D}x^r = rx^{r-1}.$$

Juurifunktiot derivoidaan kirjoittamalla ne ensin potenssimuotoon:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

$$\mathrm{D}x^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$$

$$\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^1 x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\mathrm{D}\frac{1}{x\sqrt{x}} = \mathrm{D}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2 x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

## Funktion $\sqrt[n]{f}$ derivaatta

Derivoituvan funktion $f(x)$ jokainen potenssi $f(x)^r$, missä $r$ on rationaaliluku, derivoidaan kaavalla

$$\mathrm{D}f(x)^r = rf(x)^{r-1}f'(x).$$

Funktiot $\sqrt[n]{f(x)}$ derivoidaan funktion potenssin derivointikaavalla kirjoittamalla funktion lauseke ensin potenssimuotoon:

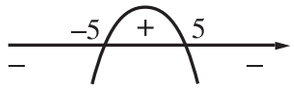
$$\sqrt[n]{f(x)} = f(x)^{\frac{1}{n}}.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\sqrt{3x-1} &= \mathrm{D}(3x-1)^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}(3x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{D}(3x-1)\\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x-1}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}\end{aligned}$$

Juurifunktioita tutkittaessa tulee selvittää funktion määrittelyjoukko.

Määritetään funktion
$f(x) = 2x - \sqrt{25 - x^2}$
suurin ja pienin arvo.

Funktio $f$ on määritelty, kun $25 - x^2 \geqslant 0$.
Lausekkeen $25 - x^2$ nollakohdat ovat $-5$ ja 5, ja lausekkeen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.




Funktio $f$ on määritelty suljetulla välillä $[-5, 5]$.

Derivoidaan funktio $f$.

$$f(x) = 2x - (25 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{2} \cdot (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{D}(25 - x^2)$$

$$= 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x)$$

$$= 2 + \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = \frac{2\sqrt{25 - x^2} + x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Funktiolla $f$ on derivaatta, kun muuttuja $x$ on välillä $]-5, 5[$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{2\sqrt{25 - x^2} + x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0$$

$$2\sqrt{25 - x^2} + x = 0$$

$$2\sqrt{25 - x^2} = -x$$

Yhtälön neliöönkorotusehto on $-x \geqslant 0$ eli $x \leqslant 0$.

$$4(25 - x^2) = x^2$$

$$100 - 4x^2 = x^2$$

$$5x^2 = 100$$

$$x^2 = 20$$

$$x = \sqrt{20} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{20}$$

Luku $-\sqrt{20} = -2\sqrt{5} \approx -4{,}47$ on derivaattafunktion $f'$ määrittelyjoukossa $]-5, 5[$ ja täyttää neliöönkorotusehdon $x \leqslant 0$. Derivaattafunktion ainoa nollakohta on $-2\sqrt{5}$.

Lasketaan funktion $f(x) = 2x - \sqrt{25 - x^2}$ arvo derivaattafunktion nollakohdassa ja suljetun välin $[-5, 5]$ päätepisteissä.

$$f(-2\sqrt{5}) = 2 \cdot (-2\sqrt{5}) - \sqrt{25 - 20}$$
$$= -4\sqrt{5} - \sqrt{5} = -5\sqrt{5} \approx -11{,}2$$

$$f(5) = 2 \cdot 5 - \sqrt{25 - 25} = 10 - 0 = 10$$

$$f(-5) = 2 \cdot (-5) - \sqrt{25 - 25} = -10 - 0 = -10$$

Funktion $f$ suurin arvo on $10$ ja pienin arvo $-5\sqrt{5}$.

# Logaritmi

Oletetaan, että $k > 0$ ja $k \neq 1$.

Yhtälöllä $k^x = a$ on ratkaisu aina, kun $a > 0$. Ratkaisu on luvun $a$ $k$-kantainen logaritmi. Se merkitään $\log_k a$.

$\log_5 \frac{1}{25} = -2$, koska $\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$.

$\log_5 5^{73} = 73$

$k$-kantainen logaritmifunktio $\log_k x$ on määritelty, kun $x > 0$.

Funktio $\log_3 (x + 4)$ on määritelty, kun $x + 4 > 0$ eli kun $x > -4$.

Logaritmin määritelmän mukaan

$\log_k x = y$, jos ja vain jos $x = k^y$.

Jos $\log_3 x = \frac{1}{2}$, niin $x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Luvun $x$ $k$-kantainen logaritmi on siis eksponentin arvo, kun luku $x$ on ilmaistu luvun $k$ potenssina.

$x = k^{\log_k x}$

$7 = 3^{\log_3 7}$

Luvun $x$ 10-kantainen logaritmi merkitään $\lg x$.

$\lg 1\,000 = 3$, sillä $1\,000 = 10^3$.

$\lg x = a$, jos ja vain jos $x = 10^a$

Jos $\lg x = -2$, niin $x = 10^{-2} = 0{,}01$.

Luvun $x$ $e$-kantainen logaritmi merkitään $\ln x$. $e$-kantaista logaritmia kutsutaan luonnolliseksi logaritmiksi.

$\ln \frac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2$

$\ln x = a$, jos ja vain jos $x = e^a$

Yhtälö $\ln x - 3 = 0$ toteutuu, kun $\ln x = 3$ eli kun $x = e^3$.

## Logaritmikaavat

Potenssikaavoista voidaan johtaa potenssin, tulon ja osamäärän logaritmikaavat.

$\log_k a^s = s \cdot \log_k a$

$\ln x^5 = 5 \ln x$

$\lg 7^{3000} = 3\,000 \cdot \lg 7 \approx 2535{,}3$, joten

$7^{3000} \approx 10^{2535{,}3}$

$\log_k ab = \log_k a + \log_k b$

$\ln 5x = \ln 5 + \ln x$

$2 \log_6 3 + \log_6 4 = \log_6 3^2 + \log_6 4$

$= \log_6 (3^2 \cdot 4) = \log_6 36 = 2$

$\log_k \frac{a}{b} = \log_k a - \log_k b$

$\ln \frac{5}{x} = \ln 5 - \ln x$

$\log x - \log \frac{x}{y^2} = \log x - (\log x - \log y^2)$

$= \log x - \log x + \log y^2$

$= \log y^2 = 2 \log y$

Logaritmikaavojen avulla voidaan ratkaista logaritmiyhtälöitä.

Ensin tulee selvittää, millä muuttujan arvoilla yhtälö on määritelty.

Yhtälö saatetaan logaritmikaavojen ja logaritmin määritelmän avulla muotoon

$\log a = \log b$,

jolloin $a = b$.

Ratkaistaan yhtälö

$\log_3 (5 + x) + \log_3 (7 - x) = 3$.

Tulee olla $5 + x > 0$ ja $7 - x > 0$ eli $x > -5$ ja $x < 7$. Yhdistämällä saadaan määrittelyehto $-5 < x < 7$.

$$\log_3 (5 + x) + \log_3 (7 - x) = 3$$

$$\log_3 ((5 + x)(7 - x)) = 3$$

$$\log_3 ((5 + x)(7 - x)) = \log_3 3^3$$

$$(5 + x)(7 - x) = 3^3$$

$$-x^2 + 2x + 35 = 27$$

$$-x^2 + 2x + 8 = 0$$

Ratkaisukaavalla: $x = -2$ tai $x = 4$

Molemmat luvut kuuluvat määrittelyjoukkoon $]-5, 7[$. Yhtälö toteutuu kun $x = -2$ tai $x = 4$.

Tyyppiä $k^x = a$ olevat eksponenttiyhtälöt voidaan ratkaista likimääräisesti käyttämällä luonnollista tai 10-kantaista logaritmia ja potenssin logaritmikaavaa.

Ratkaistaan, kuinka monessa vuodessa pääoma kasvaa yli kolminkertaiseksi, jos sijoituksen vuotuinen korkotuotto 6 %.

Jos pääoman alkuperäinen arvo on $a$, niin saadaan epäyhtälö.

$$1{,}06^x \cdot a > 3a \qquad | : a$$

$$1{,}06^x > 3$$

$$\ln 1{,}06^x > \ln 3$$

$$x \cdot \ln 1{,}06 > \ln 3 \qquad | : \ln 1{,}06 > 0$$

$$x > \frac{\ln 3}{\ln 1{,}06} \approx 18{,}9$$

Pääoma tulee yli kolminkertaiseksi 19 vuodessa.

Näin voidaan määrittää myös kaikkien logaritmien likiarvot.

Luvun 9 5-kantainen logaritmi $\log_5 9$ on yhtälön $5^x = 9$ ratkaisu.

$$5^x = 9$$

$$\ln 5^x = \ln 9$$

$$x \cdot \ln 5 = \ln 9$$

$$x = \frac{\ln 9}{\ln 5} \approx 1{,}37$$

Siis $\log_5 9 \approx 1{,}37$.

## Eksponenttifunktio $e^x$

Eksponenttifunktio $e^x$, jonka kantaluku on Neperin luku $e$, on kaikkialla derivoituva. Funktion $e^x$ derivaattafunktio on funktio $e^x$ itse.

$$De^x = e^x$$

Derivoidaan funktio $x^2e^x$ ja määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$D(x^2e^x) = Dx^2 \cdot e^x + x^2 \cdot De^x$$

$$= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2)e^x$$

Koska $e^x > 0$ kaikilla $x$, yhtälö

$$(2x + x^2)e^x = 0$$

toteutuu, jos ja vain jos:

$$2x + x^2 = 0$$

$$x(2 + x) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = -2.$$

## Funktiot $e^{f(x)}$

Funktion $e^{f(x)}$ derivaattafunktio löydetään käyttämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä

$$Dg(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$$

Saadaan:

$$D\, e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x).$$

$$D\frac{1}{6e^{x^2}} = D\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{e^{x^2}}\right)$$

$$= D\left(\frac{1}{6}e^{-x^2}\right) = \frac{1}{6}D\,e^{-x^2}$$

$$= \frac{1}{6}e^{-x^2} \cdot D(-x^2) = \frac{1}{6}e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

$$= -\frac{1}{3}xe^{-x^2}$$

Jokainen eksponenttifunktio $k^x$ (missä $k > 0$ ja $k \neq 1$) voidaan ilmaista muodossa $e^{ax}$, sillä

$$k = e^{\ln k}.$$

Koska

$$5 = e^{\ln 5},$$

niin

$$5^x = (e^{\ln 5})^x = e^{x \ln 5}$$

ja

$$D\,5^x = D\,e^{x \ln 5} = e^{x \ln 5}\, D(x \ln 5)$$

$$= e^{x \ln 5} \ln 5 = 5^x \ln 5.$$

Yleisesti

$$D\,k^x = k^x \ln k.$$

$$D\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x (-\ln 2)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2$$

## Logaritmifunktion derivaatta

Luonnollinen logaritmifunktio $\ln x$ on derivoituva koko määrittelyjoukossaan $]0, \infty[$.

Funktion $\ln x$ derivaattafunktio on funktio $\frac{1}{x}$.

$$\mathrm{D} \ln x = \frac{1}{x},$$

missä $x > 0$.

$$\mathrm{D}\, 4 \ln x = 4\, \mathrm{D} \ln x = 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$$

$$\mathrm{D} \ln 4x = \mathrm{D}(\ln 4 + \ln x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Määritetään funktion $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ derivaattafunktion nollakohdat. Funktion $f$ määrittelyjoukko on $]0, \infty[$.

Derivoidaan:

$$f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2 \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}.$$

Derivaattafunktion arvo on nolla, kun osoittajana oleva lauseke on nolla.

$$2 \ln x - (\ln x)^2 = 0$$

$$\ln x(2 - \ln x) = 0$$

$$\ln x = 0 \text{ tai } 2 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 0 \text{ tai } \ln x = 2$$

$$x = 1 \text{ tai } x = e^2$$

Molemmat juuret kuuluvat määrittelyjoukkoon. Derivaattafunktion nollakohdat ovat $1$ ja $e^2$.

Yhdistetyn funktion $\ln f(x)$ derivaattafunktio on

$$\mathrm{D}\ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x),$$

missä tulee olla $f(x) > 0$.

$$\mathrm{D}\ln(e^{2x} + 1) = \frac{1}{e^{2x} + 1} \cdot \mathrm{D}(e^{2x} + 1)$$

$$= \frac{1}{e^{2x} + 1} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

Tutkitaan, missä funktio

$f(x) = 4\ln x - \ln(6 - x)$

on kasvava ja missä vähenevä.

Funktio $f$ on määritelty, kun $x > 0$ ja $6 - x > 0$ eli kun $x > 0$ ja $x < 6$. Määrittelyväli on $]0, 6[$.

Derivoidaan ja määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{6 - x} \cdot (-1)$$

$$= \frac{4}{x} + \frac{1}{6 - x} = \frac{4(6 - x) + x}{x(6 - x)}$$

$$= \frac{24 - 3x}{x(6 - x)}$$

Ratkaistaan osoittajan nollakohta:

$$24 - 3x = 0$$
$$x = 8$$

Luku 8 ei ole funktion määrittelyvälillä $]0, 6[$. Derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia, joten se on koko välillä samanmerkkinen. Lasketaan väliltä yksi derivaattafunktion arvo.

$$f'(3) = \frac{15}{9} > 0$$

Derivaattafunktio $f'$ on siis positiivinen välillä $]0, 6[$. Funktio $f$ on aidosti kasvava koko määrittelyvälillään $]0, 6[$.

## Käänteisfunktio

Jos funktio $f$ on määrittelyjoukossaan aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, niin funktiolla $f$ on käänteisfunktio.

Käänteisfunktion $f^{-1}$ arvo kohdassa $y$ on yhtälön $f(x) = y$ ratkaisu.

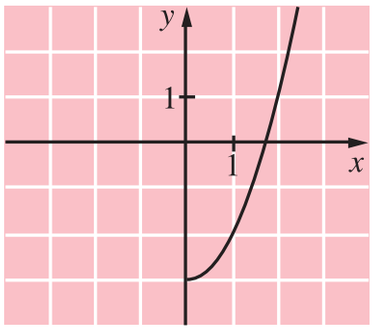
Käänteisfunktion määrittelyjoukko on funktion $f$ arvojoukko.

Käänteisfunktion lauseke saadaan ratkaisemalla $x$ yhtälöstä

$f(x) = y,$

jos ratkaiseminen on mahdollista. Tällöin saadaan

$x = f^{-1}(y).$




Funktio $f(x) = x^2 - 3$, missä $x \geqslant 0$, on aidosti kasvava, joten funktiolla $f$ on käänteisfunktio $f^{-1}$.

Esimerkiksi $f^{-1}(1) = 2$, koska $f(2) = 1$.

Käänteisfunktion $f^{-1}$ määrittelyjoukko on funktion $f$ arvojoukko $[-3, \infty[$.

$$x^2 - 3 = y$$

$$x^2 = y + 3$$

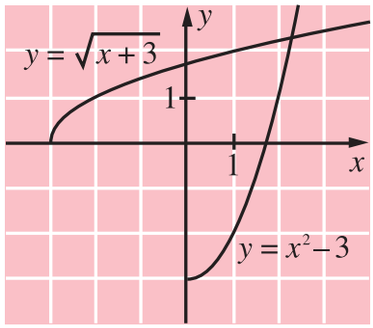
$x = \sqrt{y + 3}$ tai $x = -\sqrt{y + 3}$

Koska $x \geqslant 0$, niin

$x = \sqrt{y + 3}$.

Siis $f^{-1}(y) = \sqrt{y + 3}$.

Kun muuttujana on $x$, niin käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaaja on funktion $f(x)$ kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.




Funktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$ kuvaaja on funktion $f(x) = x^2 - 3$ kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.

# KERTAUSTEHTÄVIÄ

Tehtävät ovat kertausluvun otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä.

## JUURIFUNKTIOT

**332.** Mikä funktion määrittelyjoukko on?

a) $\sqrt{-5-x}$ b) $\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{-5-x}}$

c) $\sqrt[3]{-5-x}$

**333.** Mikä funktion määrittelyjoukko on?

a) $\sqrt{25-x^2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{25-x^2}}$

**334.** Ratkaise yhtälö.

a) $3\sqrt{x} = 1$ b) $\sqrt[3]{x} + 5 = 0$

c) $\sqrt{x} + 9 = 0$ d) $3x\sqrt{x} - 24 = 0$

**335.** Ratkaise yhtälö.

a) $2\sqrt{x+1} = x + 1$

b) $x + \sqrt{x+7} = -1$

## JUURIFUNKTIOIDEN DERIVAATTA

**336.** Derivoi funktio.

a) $x^{\frac{3}{7}}$ b) $\sqrt[5]{x}$

**337.** Derivoi.

a) $\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$ b) $x^3\sqrt{x}$

**338.** Mikä funktion pienin arvo on?

a) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$ b) $g(x) = \dfrac{x+4}{\sqrt{x}}$

**339.** Osoita, että $\dfrac{x+4}{4} \geqslant \sqrt{x}$ kaikilla $x \geqslant 0$.

**340.** a) Missä funktio $f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 1$ on kasvava ja missä vähenevä?

b) Kuinka monta juurta yhtälöllä $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$ on?

**341.** Piirturi alkaa piirtää paperille yhä suurenevaa ja suurenevaa neliötä niin, että neliön pinta-ala kasvaa aina $2{,}0\ \text{cm}^2$ sekunnissa.
Mikä neliön sivun pituus on a) 8 sekunnin
b) 200 sekunnin kuluttua?
c) Muodosta funktio $s(t)$, joka ilmaisee neliön sivun pituuden senttimetreinä $t$ sekunnin kuluttua. Millä nopeudella neliön sivun pituus kasvaa
d) 8 sekunnin e) 200 sekunnin kuluttua?

## FUNKTION $\sqrt[n]{f(x)}$ DERIVAATTA

**342.** Derivoi funktio.

a) $\sqrt{1-6x}$ b) $\dfrac{1}{3\sqrt{1-6x}}$

**343.** Osoita, että suora $y = 6x - 3$ on käyrän $y = \sqrt{10-x}$ normaali.

**344.** Määritä funktion $f(x) = 4\sqrt{x^2+15} + x$ derivaattafunktion nollakohdat.

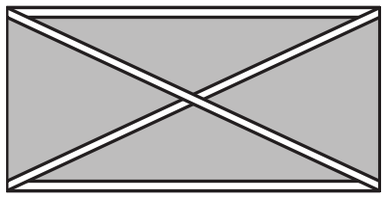
**345.** Mikä funktion $g(x) = (2-x)\sqrt{1+x}$ suurin arvo on?

**346.** Määritä funktion $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{6-2x}$ suurin ja pienin arvo.

**347.** Palokunta lähtee pisteessä $(10, 0)$ sijaitsevalta paloasemalta sammuttamaan pisteessä $(0, 10)$ sijaitsevaa metsäpaloa. Lähin maantie kulkee pitkin $x$-akselia, ja loppumatka joudutaan ajamaan kangasmetsässä, jossa ajonopeus on neljäsosa nopeudesta maantiellä. Suunnittele paloautolle nopein mahdollinen reitti.

**348.** Palloon, jonka säde on 1, on asetettu suora ympyräkartio, jonka huippu on pallon keskipisteessä ja pohjaympyrä pallon pinnalla. Mikä kartion suurin mahdollinen tilavuus on?

**349.** Rimasta, jota on käytettävissä 12 metriä, rakennetaan suorakulmion muotoisen mainostaulun lävistäjät ja kaksi vastakkaista sivua. Määritä mainostaulun mitat niin, että taulun pinta-ala on mahdollisimman suuri. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.



## LOGARITMI

**350.** Määritä luvun 5-kantainen logaritmi.

a) $5^7$ b) 125 c) 5

d) $\sqrt{5}$ e) 1 f) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

g) $\dfrac{1}{5}$ h) $\dfrac{1}{5^9}$

**351.** Määritä $x$, kun

a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_3 x = 1$

c) $\log_2 x = 0$ d) $\log_2 x = -1$

e) $\log_7 x = -3$.

**352.** Laske.

a) $5^{\log_5 7}$ b) $5^{-\log_5 3}$

**353.** Määritä.

a) $\lg 10\,000$ b) $\lg 10^{-15}$

c) $\ln e^4$ d) $\ln \dfrac{1}{e}$

**354.** Määritä kolmen numeron tarkkuudella luku $a$, kun

a) $\lg a \approx 3{,}12$ b) $\lg a \approx -0{,}359$.

**355.** Ratkaise yhtälö.

a) $3 \ln x - 1 = 0$ b) $5 \ln x + 10 = 0$

## LOGARITMIKAAVAT

**356.** Laske.

a) $2 \log_5 10 - \log_5 4$

b) $\log_3 (\sqrt{10} - 1) + \log_3 (\sqrt{10} + 1)$

**357.** Sievennä lauseke

$3 \log_2 x + \log_2 24x - \log_2 3x^4$.

**358.** Ratkaise yhtälö.

a) $\log_6 (x + 5) + \log_6 (x + 10) = 2$

b) $2 \log_5 (1 - x) = \log_5 (5 + x) + 2$

**359.** Kumpi kokonaisluvuista $3^{4513}$ ja $10^{2153}$ on suurempi? Kuinka monta numeroa luvuissa on?

**360.** Ratkaise yhtälö kahden numeron tarkkuudella.

a) $1{,}7^x \cdot 2{,}1 = 11$ b) $0{,}98^{3x} = 0{,}12$

**361.** Määritä neljän numeron tarkkuudella

a) $\log_5 7$ b) $\log_7 \dfrac{1}{5}$.

**362.** Kopiokone pienentää kuvion mitat 0,71-kertaisiksi. Kuvion korkeus on 28 cm. Kuinka monella peräkkäisellä kopioinnilla kuvion korkeus saadaan pienemmäksi kuin 1,0 cm?

**363.** Mikä on ensimmäinen luvun 2 kokonaislukupotenssi, jonka arvoa ei voida suoraan laskea tietokoneen laskinohjelman potenssinäppäilyllä eli jonka arvo on vähintään $10^{1500}$?

**364.** Suomalaisista 1,1 % kuuluu ortodoksiseen kirkkokuntaan. Kuinka suuri satunnaisesti kootun suomalaisryhmän tulee olla, jotta todennäköisyys, että mukana on ainakin yksi ortodoksi, olisi suurempi kuin 0,9?

## EKSPONENTTIFUNKTIO $e^x$

**365.** Määritä funktion derivaattafunktion nollakohdat.

a) $f(x) = 3e^x - x$ b) $g(x) = 3e^x + x$

**366.** Osoita, että funktio $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ on kaikkialla aidosti kasvava.

**367.** Määritä

a) funktion $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$ pienin arvo välillä $]0, \infty[$

b) funktion $g(x) = x^3e^x$ pienin arvo.

**368.** Osoita, että käyrät $y = (x^2 - 6x + 7)e^x$ ja $y = -2e^x$ sivuavat toisiaan.

## FUNKTIOT $e^{f(x)}$

**369.** Derivoi funktio.

a) $e^{-x^3}$ b) $e^{\frac{x^2}{2}}$

c) $\dfrac{1}{e^{4x}}$ d) $(e^x)^4$

**370.** Kaasunäytteessä olevan radioaktiivisen radonin massa vähenee joka vuorokausi 17 %. Radonin massa on nyt 75 µg. Muodosta funktio $m(t)$, joka ilmaisee radonin massan $t$ vuorokauden kuluttua. Millä nopeudella massa vähenee hetkellä a) $t = 2$ b) $t = 10$?

**371.** Osoita, että funktio $f(x) = -e^{-x} + x + 1$ on kaikkialla aidosti kasvava.

**372.** Missä funktio $f(x) = e^{-x} + 3x$ on kasvava?

**373.** Missä kohdassa funktio $f(x) = e^{2x} - 6e^x$ saa pienimmän arvonsa? Mikä funktion $f$ pienin arvo on?

**374.** Mihin käyrän $y = e^{x^2}$ pisteisiin piirretyt tangentit kulkevat origon kautta?

**375.** Suorakulmion yksi sivu on $x$-akselilla ja kaksi kärkeä käyrällä $y = e^{-2|x|}$. Mikä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

## LOGARITMIFUNKTION DERIVAATTA

**376.** Saata funktion lauseke muotoon $a \ln x + b$ ja derivoi funktio.

a) $f(x) = 4 \ln x - \ln 4x$

b) $g(x) = \ln x^3 + \ln \dfrac{3}{x}$

c) $h(x) = \ln \sqrt{x} + \ln \sqrt[3]{x}$

**377.** Määritä funktion derivaattafunktion nollakohdat.

a) $f(x) = x^4 \ln x$ b) $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^4}$

**378.** Määritä funktion $g(x) = \ln x + \dfrac{1}{x^2}$ suurin ja pienin arvo välillä $[1, 2]$.

**379.** Osoita, että $x \ln x + 1 \geqslant x$ kaikilla $x > 0$.

**380.** Määritä positiivinen vakio $a$ niin, että funktion $f(x) = \ln ax$ kuvaaja sivuaa suoraa $y = x$. Mikä sivuamispiste on?

**381.** Derivoi funktio.

a) $\ln(x^2 - x)$ b) $\ln(e^{-2x} + 3)$

**382.** Olkoon $f(x) = 2 \ln x - \ln(6 - x)$. Määritä

a) funktion $f(x)$ nollakohdat

b) funktion $f'(x)$ nollakohdat.

**383.** Missä pisteessä ja missä kulmassa funktion $f(x) = \ln(2x + 5)$ kuvaaja leikkaa

a) $x$-akselin b) $y$-akselin?

## KÄÄNTEISFUNKTIO

**384.** Onko funktiolla käänteisfunktio? Mikä funktion käänteisfunktio on?

a) $f(x) = x^6$ b) $f(x) = x^6$, missä $x \geqslant 0$

c) $f(x) = x^5$ d) $f(x) = 10^x$

**385.** a) Osoita, että funktiolla $f(x) = \ln(e^x + 1)$ on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on?

b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ lauseke.

**386.** Osoita, että funktiolla $g(x) = 10x^3 + x + 1$ on koko reaalilukujen joukossa määritelty käänteisfunktio. Päättele käänteisfunktion arvot $g^{-1}(1)$ ja $g^{-1}(12)$.

# TEHTÄVÄSARJOJA

## SARJA A

**1.** Missä funktio $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$ on kasvava ja missä vähenevä?

**2.** Ratkaise yhtälö $\frac{1}{2}\log_3(8 - x) = \log_3 x + 1$.

**3.** Mikä on ensimmäinen luvun $0{,}99$ potenssi (eksponentti kokonaisluku), jonka arvo on pienempi kuin $10^{-1000}$?

**4.** Osoita, että suora $y = -2x + 3$ on käyrän $y = \sqrt{4x + 18}$ normaali.

**5.** Osoita, että $\sqrt{x} > \ln(x + 1)$ kaikilla $x > 0$.

**6.** Ympyrän jänteen pituus on $2a$. Piste $P$ on jänteen keskipisteen kautta kulkevan säteen jatkeella säteen etäisyydellä ympyrästä. Määritä ympyrän säde niin, että pisteen $P$ etäisyys jänteestä on mahdollisimman pieni.

## SARJA B

**1.** Mikä funktion $f(x) = x - 10\sqrt{x}$ pienin arvo on?

**2.** Suotuisissa kasvuoloissa erään bakteeriviljelmän massa tulee joka tunti $1{,}7$-kertaiseksi. Tällä hetkellä $(t = 0)$ massa on $3{,}1$ g. Kuinka suuri viljelmän massa on, ja millä nopeudella massa kasvaa hetkellä a) $t = 2$ b) $t = 10$?

**3.** Määritä toisen asteen polynomifunktio $P(x) = ax^2 + bx + c$ niin, että funktion $P(x)e^x$ derivaattafunktio on $(x^2 + x + 1)e^x$.

**4.** Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ kuvaajan pisteeseen, joka ei ole origo, piirretään kuvaajan tangentti ja $x$-akselin suuntainen suora. Osoita, että tangentti puolittaa janan, jonka origo ja $x$-akselin suuntainen suora erottavat $y$-akselista.

**5.** Funktion $\ln x$ kuvaajalle on piirretty normaali pisteeseen $(a, \ln a)$, missä $a > 1$. Normaali rajaa kolmion yhdessä $x$-akselin ja suoran $x = a$ kanssa. Millä $a$:n arvolla kolmion pinta-ala on suurin?

**6.** Säiliö on muodoltaan huippu alaspäin seisova suora ympyräkartio, jonka korkeus on yhtä suuri kuin pohjan säde. Säiliötä ryhdytään täyttämään vedellä, jota valutetaan säiliöön nopeudella $10$ l/s. Millä nopeudella vedenpinta nousee a) yhden sekunnin
b) 10 sekunnin kuluttua?

## SARJA C

**1.** Osoita, että funktion $f(x) = e^x - x - 1$ kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on sivuamispisteen $x$- ja $y$-koordinaattien summa.

**2.** Taivaankappaleen kirkkaus voidaan määrittää fysikaalisesti mittaamalla taivaankappaleesta tulevan valon määrä. Mitattujen kirkkauksien suhteet eivät kuitenkaan vastaa näköhavaintoa. Taivaankappaleen havaitun kirkkauden yksikkönä käytetään *magnitudia*. Magnitudi $m$ lasketaan taivaankappaleen mitatusta kirkkaudesta $F$ kaavalla $m = -2{,}5 \lg F$. Kaavassa mitatun kirkkauden yksikkönä on Lyyran tähdistössä sijaitsevan Vegan kirkkaus.

a) Linnunradan kirkkaimman tähden Siriuksen mitattu kirkkaus on 4,0 kertaa niin suuri kuin Vegan ja planeetta Venuksen kirkkaus 14 kertaa niin suuri kuin Siriuksen. Määritä Siriuksen ja Venuksen magnitudit.

b) Auringon magnitudi on $-27$, ja himmeimmät taivaankappaleet, jotka ihminen pystyy paljaalla silmällä havaitsemaan, ovat magnitudiltaan 6,0. Vertaa Auringon ja himmeimpien näkyvien taivaankappaleiden mitattua kirkkautta Vegan mitattuun kirkkauteen.

**3.** Osoita, että

$2 \log_2 (1 + \sqrt{3}) = \log_2 (2 + \sqrt{3}) + 1.$

**4.** a) Määritä mahdollisimman suuri nollan sisältävä väli $A$ niin, että välille $A$ rajatulla funktiolla $f(x) = x\sqrt{x + 12} + 4$ on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion $f^{-1}$ määrittelyjoukko tällöin on?

b) Mikä käänteisfunktion $f^{-1}$ nollakohta on? Missä kohdassa käänteisfunktion $f^{-1}$ arvo on $-3$?

c) Määritä kahden desimaalin tarkkuudella käänteisfunktion arvo $f^{-1}(0)$.

**5.** Funktion $f(x) = e^{x^2}$ kuvaajalle piirretään normaali muuttujan arvon $a$ kohdalle, missä $a \neq 0$. Mitä pistettä normaalin ja $y$-akselin leikkauspiste lähenee, kun $a$ lähenee nollaa?

**6.** Ympyrän säde on 3. Ympyrän ulkopuolella olevan pisteen $P$ etäisyys ympyrän keskipisteestä $O$ on 7. Ympyrälle piirretään pisteiden $P$ ja $O$ kautta kulkevaa suoraa vastaan kohtisuora jänne ja jänteen päätepisteet yhdistetään pisteeseen $P$. Mikä näin muodostuvan kolmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

## SARJA D

**1.** Millä muuttujan arvolla funktion $f(x) = 3x - 2\sqrt{1-x}$ arvo on 2?

**2.** Määritä funktion $f(x) = \ln x - 2x$ suurin ja pienin arvo välillä $[\frac{1}{e}, 1]$.

**3.** Osoita, että käyrä $y = e^x$ on kokonaan suoran $y = 2x$ yläpuolella.

**4.** Osoita, että yhtälöllä $e^{0{,}002x} = -10^{-3}x + 10^3$ on tasan yksi juuri. Määritä juuren likiarvo kolmen numeron tarkkuudella.

**5.** Käyrälle $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ piirretty tangentti rajaa yhdessä koordinaattiakselien kanssa kolmion. Kun kolmio pyörähtää $x$-akselin ympäri, se piirtää avaruuteen suoran ympyräkartion. Osoita, että kaikkien näin muodostuvien kartioiden tilavuudet ovat yhtä suuret.

**6.** Jäteveden juoksutuskourun poikkileikkaus on muodoltaan tasakylkinen puolisuunnikas. Kourun syvyydeksi on päätetty 1,0 m ja poikkileikkauksen pinta-alaksi 2,0 m$^2$. Virtausvastuksen minimoimiseksi kourun seinien ja pohjan yhteenlasketun pinta-alan tulee olla mahdollisimman pieni. Mitkä tulee asettaa poikkileikkauksen mitoiksi?

## SARJA E

**1.** Määritä funktion $g(x) = \sqrt{4-x^2} - x$ derivaattafunktion nollakohdat.

**2.** Missä funktio $f(x) = x + 3\ln x - \frac{2}{x}$ on kasvava ja missä vähenevä?

**3.** Mikä arvo vakiolla $a$ tulee olla, jotta funktion $f(x) = \sqrt{x} + a$ kuvaaja sivuaisi suoraa $y = 2x$? Mikä sivuamispiste tällöin on?

**4.** Määritä funktion $f(x) = x(\ln x)^2 - x\ln x^2$ nollakohdat ja ääriarvokohdat.

**5.** Voidaan osoittaa, että käyrä $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ja muotoa $y = \sqrt{2x^2 + c}$ oleva käyrä leikkaavat yhdessä pisteessä. Osoita, että käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

**6.** Kolmiota rajoittavat käyrän $y = e^x$ tangentti, negatiivinen $x$-akseli ja positiivinen $y$-akseli. Mikä kolmion suurin mahdollinen pinta-ala on?

# Vastaukset

## Funktion derivaatta

**1.** erotusosamäärä $\dfrac{2^x - 8}{x - 3}$,

derivaatan $f'(3)$ likiarvo 5,547

**2.** Erotusosamäärä kohdassa 2 on $\dfrac{3^{2+h} - 9}{h}$.

Erotusosamäärä kohdassa 0 on $\dfrac{3^h - 1}{h}$.

Derivaattojen likiarvot ovat
$f'(2) \approx 9{,}893$ ja $f'(0) \approx 1{,}099$.

**3.** a) $f'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

$= \lim\limits_{x \to 3} (x + 3) = 6$

b) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{6h + h^2}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} (6 + h) = 6$

**4.** erotusosamäärä $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

a) 0,2498 b) 0,2500 c) 0,2500

d) Derivaatta näyttää olevan $0{,}25 = \dfrac{1}{4}$.

(Arvojen laskemista varten erotusosamäärän lauseke kannattaa näppäillä graafisen laskimen grafiikkafunktioksi, jolloin voidaan käyttää laskimen arvojenlaskemistoimintoa.)

**5.** erotusosamäärä $\dfrac{\sqrt{16 + h} - 4}{h}$

a) 0,1248 b) 0,1250 c) 0,1250

d) Derivaatta näyttää olevan $0{,}125 = \dfrac{1}{8}$.

(Lauseke kannattaa näppäillä graafisen laskimen grafiikkafunktioksi.)

**6.** a) kohdassa 1 b) kohdissa $-1$ ja 1

Kun $x < -1$, niin $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Kun $-1 < x < 1$, niin $f'(x) = 2$.

Kun $x > 1$, niin $f'(x) = 2$.

**7.** a) $\dfrac{1}{2}x^2$

b) $-\dfrac{3}{x^2}$ $\left(\mathrm{D}\dfrac{3}{x} = 3\mathrm{D}\dfrac{1}{x} = 3\mathrm{D}x^{-1} = 3 \cdot (-1) \cdot x^{-2}\right)$

c) $-\dfrac{1}{3x^3}$ $\left(\mathrm{D}\dfrac{1}{6x^2} = \dfrac{1}{6}\mathrm{D}\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{6}\mathrm{D}x^{-2}\right.$

$\left. = \dfrac{1}{6} \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{x^3}\right)$

**8.** $-\dfrac{2}{27}$ ($f'(3)$, missä $f'(x) = -\dfrac{6}{x^4}$.)

**9.** 22 cm$^3$/s ($V'(300)$)

**10.** a) $12x^2(x^3 + 5)^3$

$(\mathrm{D}(x^3 + 5)^4 = 4(x^3 + 5)^3 \cdot \mathrm{D}(x^3 + 5))$

b) $-\dfrac{8}{(4x + 5)^3}$

$\left(\mathrm{D}\dfrac{1}{(4x + 5)^2} = \mathrm{D}(4x + 5)^{-2}\right.$

$= -2 \cdot (4x + 5)^{-3} \cdot \mathrm{D}(4x + 5)$

$\left. = -2 \cdot \dfrac{1}{(4x + 5)^3} \cdot 4\right)$

**11.** $f'(x) = 4x^3 \cdot (3x + 1)^5 + x^4 \cdot 5(3x + 1)^4 \cdot 3$

$= 4x^3(3x + 1)^5 + 15x^4(3x + 1)^4$

**12.** a) $-\dfrac{10}{(x - 4)^2}$

$\left(\mathrm{D}\left(\dfrac{3x - 2}{x - 4}\right) = \dfrac{3 \cdot (x - 4) - (3x - 2) \cdot 1}{(x - 4)^2}\right)$

b) $\dfrac{-x^4 - 2x}{(x^3 - 1)^2}$

**13.** a) Derivaattafunktio $f'(x) = 5x^4 + 21x^2$ on positiivisilla luvuilla kerrottujen parillisten potenssien summa, joten derivaatta on kaikkialla epänegatiivinen ja nolla vain kohdassa $x = 0$.
b) Derivaattafunktiolla $g'(x) = -3x^2 - 2x - 1$ ei ole nollakohtia, ja sen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten $g'(x) < 0$ kaikilla $x$.

**14.** aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -3]$ ja $[0, 3]$, aidosti vähenevä väleillä $[-3, 0]$ ja $[3, \infty[$, maksimikohdat $-3$ ja $3$, maksimiarvo molemmissa maksimikohdissa $81$, minimikohta $0$ ja minimiarvo $0$
(Laaditaan derivaattafunktion $g'(x) = 36x - 4x^3$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion $g$ kulkukaavioksi. Derivaatan merkit selvitetään laskemalla yksi derivaattafunktion arvo jokaisesta merkkikaavion lokerosta.)

**15.** a) $f(-5) = -150$ (Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $f$ saa välillä $]-\infty, 4]$ pienimmän arvon kohdassa $-5$.)
b) $f(11) = -406$ (Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $f$ saa välillä $]-\infty, 11]$ pienimmän arvon joko kohdassa $-5$ tai kohdassa $11$.)

**16.** $g(-\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$
(Derivaattafunktiolla
$g'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5} = \frac{-2x^2 + 4}{x^5}$ on välillä $]-2, -1[$ nollakohta $-\sqrt{2}$. Suurin arvo on jokin luvuista $g(-\sqrt{2})$, $g(-1)$ ja $g(-2)$. Kohta, jossa funktio saa suurimman arvon, voidaan päätellä myös funktion $g$ kulkukaaviosta.)

## Juurifunktiot ja juuriyhtälöt

**17.** a) $x = \sqrt[5]{7} \approx 1{,}48$
b) $x = \sqrt[5]{-7} \approx -1{,}48$
(Huomaa, että $\sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7}$.)
c) $x = \sqrt[6]{7} \approx 1{,}38$ tai $x = -\sqrt[6]{7} \approx -1{,}38$
d) Ei juuria.

**18.** a) $[-2, \infty[$ b) $]-2, \infty[$
c) $]-\infty, -3]$ d) $\mathbb{R}$

**19.** a) $x = 6$
(Neliöönkorotetun yhtälön juuret ovat $1$ ja $6$. Juuret joko sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön tai sovelletaan neliöönkorotusehtoa $x \geqslant 2$. Tuloksen voi tarkistaa graafisella laskimella piirtämällä funktioiden $\sqrt{3x - 2}$ ja $x - 2$ kuvaajat samaan laskimen näyttöön.)
b) $x = -2$
(Neliöönkorotetun yhtälön juuret ovat $-2$ ja $3$. Juuret joko sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön tai sovelletaan neliöönkorotusehtoa $x \leqslant 1$.)

**20.** a) $x = 9$ b) Ei juuria. c) $x = -9$

**21.** a) $x = 9$
(Yhtälön $\sqrt{x} = x - 6$ neliöönkorotusehto on $x \geqslant 6$.)
b) $x = 4$
(Yhtälön $3\sqrt{x} = 10 - x$ neliöönkorotusehto on $x \leqslant 10$.)

**22.** a) $0 \leqslant x \leqslant 2$ b) $x = \frac{8}{13}$
(Koska yhtälön molemmat puolet ovat koko määrittelyjoukossa epänegatiiviset, neliöön korottamalla saatu yhtälö $8 - 4x = 9x$ on koko määrittelyjoukossa yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön kanssa.)

**23.** a) $]-\infty, 3]$
b) $-1$ (Yhtälön $\sqrt{3 - x} = -2x$ neliöönkorotusehto on $x \leqslant 0$.)

**24.** a) $[-5, 5]$ b) $-4$

(Yhtälön $\sqrt{25 - x^2} = -x - 1$ neliöönkorotuseh-
to on $x \leqslant -1$.)

**25.** a) $x = \sqrt[3]{16}$ b) $x = 0$ tai $x = 16$

c) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{16}$

**26.** a) $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = -1$ (Kun yhtälö ko-
rotetaan kolmanteen (parittomaan) potenssiin,
se säilyy yhtäpitävänä. Saadaan yhtälö $x = x^3$
eli $x^3 - x = 0$.)

b) $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = -2$

**27.** a) $[-1, \frac{1}{2}]$ b) $]-1, \frac{1}{2}]$

**28.** a) $x = \frac{1}{4}$ b) $x = -64$

c) Ei juuria.

**29.** a) $x = -1$ b) Ei juuria.

**30.** a) $x = 36$ b) $x = 4$

**31.** a) $x = 0$ tai $x = 9$

b) $x = 0$ c) $x = 0$ tai $x = \sqrt[3]{9}$

**32.** a) $\mathbb{R}$ b) $-\frac{3}{4}$

(Yhtälön $3\sqrt{x^2 + 1} = -5x$ neliöönkorotusehto
on $x \leqslant 0$.)

**33.** a) $]-\infty, -2]$ b) $-4$ (Koska yhtälön
$\sqrt{x^2 - 4} = 2\sqrt{-x - 1}$ molemmat puolet ovat
koko määrittelyjoukossa epänegatiiviset, neli-
öön korotettu yhtälö on koko määrittelyjoukos-
sa yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön kanssa.)

**34.** a) $x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ b) $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

**35.** a) $x = 0$ tai $x = 8$ tai $x = -8$

b) $x = 0$ tai $x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ tai $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

**36.** a) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{64}$

b) $x = 0$ tai $x = 4\,096$

**37.** $x = \frac{9}{25}$

(Aluksi yhtälö saatetaan muotoon
$3\sqrt{x} = 1 + \sqrt{1 - x}$. Perustele, että tämä yhtälö
säilyy neliöönkorotuksessa yhtäpitävänä.)

## Juurifunktioiden derivaatta

**38.** a) $x^{\frac{5}{2}}$ b) $5x^{-\frac{1}{2}}$

c) $\frac{1}{5}x^{-\frac{5}{2}}$ d) $2x^{-\frac{1}{3}}$

**39.** a) $\frac{3}{\sqrt{x}}$ b) $-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

c) $6x^3\sqrt{x}$

**40.** a) $\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$ b) $-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$

**41.** a) $\frac{5}{2}x\sqrt{x}$ b) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

c) $-\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ $(\frac{2}{3}\,\mathrm{D}x^{-\frac{3}{2}})$

**42.** a) $\frac{1}{\sqrt{x}} + 1$

(Voidaan suorittaa ensin neliöönkorotus tai voi-
daan käyttää funktion potenssin derivointikaa-
vaa $\mathrm{D}(1 + \sqrt{x})^2 = 2(1 + \sqrt{x}) \cdot \mathrm{D}(1 + \sqrt{x})$.)

b) $\frac{3}{\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})^5$

(Käytetään funktion potenssin derivointikaa-
vaa.)

**43.** a) $-\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$

($f(x) = xx^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$)

**44.** $f(2) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ (Jos jaetaan termeittäin, funktion lauseke tulee muotoon $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$.)

**45.** $\frac{1}{4}$

**46.** Funktion $f(x) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$ pienin arvo on $f(1) = 3$. Koska funktion $f$ pienin arvo on 3, niin $f(x) \geqslant 3$ kaikilla $x > 0$.

**47.** Käyrät leikkaavat pisteessä, jonka $x$-koordinaatti on 1. Koska funktioiden $f(x) = x^2$ ja $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ derivaattojen $f'(1)$ ja $g'(1)$ tulo on $-1$, käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

**48.** a) 71 cm/s b) 22 cm/s
($t$ sekunnin kuluttua neliön pinta-ala on $t$ neliömetriä ja sivun pituus $s(t) = \sqrt{t}$ metriä.)

**49.** a) 0,5 sekunnin kuluttua 53 cm/s ja viiden sekunnin kuluttua 11 cm/s.
($t$ sekunnin kuluttua kuution särmän pituus on $s(t) = \sqrt[3]{t}$ metriä.)
b) 0,5 sekunnin kuluttua 5,0 m$^2$/s ja viiden sekunnin kuluttua 2,3 m$^2$/s.
($t$ sekunnin kuluttua kuution pinta-ala on $s(t) = 6(\sqrt[3]{t})^2 = 6t^{\frac{2}{3}}$ neliömetriä.)

**50.** a) $\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$ ja $\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

b) $-\frac{5}{\sqrt[3]{x}}$ ja $-\frac{6}{x\sqrt{x}}$

**51.** a) $\frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}}$, derivaattafunktio on $\frac{3}{2}\sqrt{x}$
(Voidaan joko supistaa ensin:
$\frac{x^2}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x} = x^1x^{\frac{1}{2}}$, tai sitten siirtyä heti murtopotensseihin ja sieventää potenssikaavojen avulla: $\frac{x^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2-\frac{1}{2}}$.)

b) $\frac{\sqrt{x}}{x} = x^{-\frac{1}{2}}$, derivaattafunktio on $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

c) $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, derivaattafunktio on $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

**52.** a) $3{,}14x^{2{,}14}$ b) $0{,}99x^{-0{,}01}$

**53.** $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$,

$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$ $(x > 0)$,

$f'''(x) = -\frac{3}{8x\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

**54.** a) $\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ b) $2x - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$
(Ainakin b-kohdassa kannattaa ensin suorittaa neliöönkorotus.)

**55.** a) (8, 0) b) (0, $-24$)

**56.** $\frac{1}{3}$

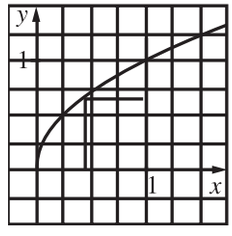
**57.** $g(1) = 4$ (Jos jaetaan termeittäin, funktio tulee muotoon $g(x) = x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$.)

**58.** Funktion $f(x) = x\sqrt{x} - 3x + 5$ pienin arvo on $f(4) = 1$. Siis $f(x) > 0$ kaikilla $x \geqslant 0$, joten funktiolla $f$ ei ole nollakohtia.

**59.** Ratkaisemalla yhtälö $f'(x) = \frac{1}{6}$, missä $f(x) = \sqrt{x}$, nähdään, että käyrälle $y = \sqrt{x}$ muuttujan arvon 9 kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on $\frac{1}{6}$. Kun muodostetaan tangentin yhtälö, saadaan suora $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.
Toinen tapa on ratkaista ensin käyrien yhteiset pisteet yhtälöstä $\sqrt{x} = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$, jolloin saadaan $x = 9$. Koska $f'(9) = \frac{1}{6}$, käyrät sivuavat toisiaan.

**60.** yksi
(Tutkitaan funktiota $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1$. Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $f$ on aidosti vähenevä välillä $[0, \frac{1}{4}]$ ja aidosti kasvava välillä $[\frac{1}{4}, \infty[$.
Funktiolla $f$ on siis korkeintaan kaksi nollakohtaa. Koska $f(0) < 0$, funktiolla ei ole nollakohtaa välillä $[0, \frac{1}{4}]$. Koska $f(\frac{1}{4}) < 0$ ja $f(2) > 0$, funktiolla on nollakohta välillä $[\frac{1}{4}, \infty[$.)

**61.** a)




b) $A(x) = (1 - x)\sqrt{x}$

c) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ (Funktio $A(x)$ saa välillä $[0, 1]$ suurimman arvon kohdassa $\frac{1}{3}$.)

**62.** a) 200 m/vrk b) 130 m/vrk
($t$ vuorokauden kuluttua saastuneen alueen pinta-ala on $t$ neliökilometriä ja säde $r(t) = \sqrt{\frac{t}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{t}$.)

**63.** a) 1,3 cm/s ja 0,3 cm/s
b) 2,6 dm$^2$/s ja 1,3 dm$^2$/s

**64.** Kohdassa $x = \frac{64}{729}$, suurin arvo on $\frac{4}{27}$.

**65.** a) $\pi x^{\pi - 1}$ ja $\sqrt{2}x^{\sqrt{2} - 1}$

b) 0,000011 (Kun $x = \left(\frac{3{,}1415}{\pi}\right)^{\frac{1}{\pi - 3{,}1415}}$.)

## Funktion $\sqrt[n]{f}$ derivaatta

**66.** a) $\frac{3}{2\sqrt{3x + 2}}$ b) $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

**67.** a) $\frac{3}{(1 - 2x)\sqrt{1 - 2x}}$ $(\frac{3}{\sqrt{1 - 2x}} = 3(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}})$

b) $3x\sqrt{x^2 - 1}$ $((x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}})$

**68.** Pisteessä (0, 3), tangentin yhtälö $y = \frac{2}{3}x + 3$.
(Tangentin kulmakerroin on $f'(0)$, missä $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x + 9}}$.)

**69.** $\frac{2}{3}$ $(f'(x) = \sqrt{1 - x} - \frac{x}{2\sqrt{1 - x}} = \frac{2 - 3x}{2\sqrt{1 - x}})$

**70.** suurin arvo $g(4) = 6$, pienin arvo $g(12) = 2\sqrt{3}$
(Funktio $g$ on määritelty suljetulla välillä $[0, 12]$ ja $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{24 - 2x}}$.)

**71.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$(f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Kun ratkaistaan osoittajasta saatavaa neliöjuuriyhtälöä, niin neliöönkorotusehto on $x \leqslant 0$.)

**72.** Derivaattafunktiolla $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ei ole nollakohtia, joten sen osoittamiseen kaikkialla negatiiviseksi riittää, kun lasketaan yksi funktion $f'$ arvo.

**73.** Funktion $f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}$ pienin arvo on 0, jonka funktio $f$ saa ainoastaan kohdassa $x = 0$. Siis $f(x) \geqslant 0$ kaikissa välin $[-1, \infty[$ pisteissä ja yhtäsuuruus pätee, kun $x = 0$.

**74.** a) 1,2 m/s b) 4,7 m/s

(Kun lähdöstä on kulunut $t$ sekuntia, ilmapallo on korkeudella $5t$ metriä. Etäisyys Juhasta saadaan Pythagoraan lauseella:

$d(t) = \sqrt{100^2 + (5t)^2}$.)

**75.** a) $\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$ b) $\frac{9}{2}\sqrt{3x-2}$

$((3x-2)\sqrt{3x-2} = (3x-2)^{\frac{3}{2}})$

**76.** a) $-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$ b) $\frac{x^3}{(1-x^4)\sqrt{1-x^4}}$

$(\frac{1}{2\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}(1-x^4)^{-\frac{1}{2}})$

**77.** $\frac{5}{4}$ $(f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-1}} - 1)$

**78.** $\sqrt{5}$

(Jos muuttujana on $a$, niin summa on $f(a) = \sqrt{a} + 2\sqrt{1-a}$, missä $0 \leqslant a \leqslant 1$.)

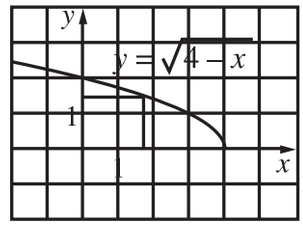
**79.** a) $[-1, 1]$

b) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$

c) $[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$

(Pienin arvo on $f(1)$ ja suurin arvo $f(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.)

**80.** a)




b) $A(x) = x\sqrt{4-x}$

c) $\frac{16}{3\sqrt{3}} \approx 3{,}1$

(Funktio $A(x)$ saa välillä $[0, 4]$ suurimman arvon kohdassa $\frac{8}{3}$.)

**81.** 4 (Osamäärän derivointikaavalla saadaan

$f'(x) = \frac{\sqrt{x-4} - \frac{x}{2\sqrt{x-4}}}{x-4}$.

Voidaan myös kirjoittaa $f(x) = x(x-4)^{-\frac{1}{2}}$ ja käyttää tulon derivointikaavaa, jolloin juurimuotoon palaamisen jälkeen saadaan

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}} - \frac{x}{2(x-4)\sqrt{x-4}}$.)

**82.** Osamäärän derivointikaavalla (tai tulon derivointikaavalla merkitsemällä

$f(x) = x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$) saadaan

$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Siis $f'(x) > 0$ kaikilla $x$.

**83.** a) 0,13 cm/viikko b) 0,57 cm/viikko

($t$ viikon kuluttua saippuan särmän pituus on $s(t) = \sqrt[3]{400 - 20t}$.)

**84.** $g(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

($g'(x) = \frac{3-4x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$. Derivaattafunktion merkki voi vaihtua nollakohdassa sekä kohdassa $x = 1$, jossa derivaattaa ei ole.)

**85.** pisteeseen $(\frac{8}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}})$

(Käyrälle pisteeseen $(a, \sqrt{4-a})$, missä $a < 4$, piirretyn tangentin yhtälö on $y - \sqrt{4-a} = -\frac{1}{2\sqrt{4-a}}(x-a)$. Tangentti leikkaa $x$-akselin pisteessä $(8-a, 0)$ ja $y$-akselin pisteessä $(0, \frac{8-a}{2\sqrt{4-a}})$. Kolmion pinta-ala on $A(a) = \frac{(8-a)^2}{4\sqrt{4-a}}$, missä $a < 4$.)

**86.** Osoittautuu, että funktion $f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$ toinen derivaattafunktio $f''(x)$ on positiivinen välillä $]0, \infty[$. Siis $f'(x)$ on aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$. Koska $f'(0) = 0$, niin $f'(x) > 0$ välillä $]0, \infty[$. Siis $f(x)$ on aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$. Koska $f(0) = 0$, niin väite seuraa. Yhtäsuuruus pätee muuttujan arvolla 0.

**87.** Merkitään $h = f^{\frac{m}{n}}$, jolloin $h^n = f^m$. Derivoimalla molemmat puolet saadaan $nh^{n-1}h' = mf^{m-1}f'$. Jatketaan kuten potenssin derivointikaavan johdossa sivulla 28.

## Juurifunktioiden sovelluksia

**88.** Kuljetaan metsän halki suoraan pisteeseen (1,8; 0) ja loppumatka pitkin $x$-akselia. (Kuljetaan linnuntietä pisteestä (0, 5) pisteeseen $(x, 0)$ ja loppumatka pitkin $x$-akselia. Voidaan olettaa, että $0 \leqslant x \leqslant 3$. Jos yhteen kilometriin polulla kuluva aika on $t$, niin koko reitin kulkemiseen menee aikaa $3t\sqrt{x^2+25} + t(3-x)$. Kulunut aika on lyhin, kun funktion $f(x) = 3\sqrt{x^2+25} + (3-x)$ arvo on pienin. Funktio $f$ saa pienimmän arvon kohdassa $\frac{5}{\sqrt{8}}$.)

**89.** 5,8 km risteyksestä $D$ (Muuttujaksi $x$ kannattaa valita etäisyys $MD$. Tällöin linjojen yhteispituus on $f(x) = 2\sqrt{x^2+100} + 12 - x$, missä $0 \leqslant x \leqslant 12$. Funktio $f$ saa pienimmän arvon kohdassa $\frac{10}{\sqrt{3}}$.)

**90.** kulmatontti 4 000 m$^2$ ja toinen tontti 1 000 m$^2$ (Jos kulmatontin pinta-ala on $x$ neliömetriä, niin rantaviivan pituus on $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{5000-x}$.)

**91.** pohjaympyrän säde $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, korkeus $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(Jos pohjaympyrän säde on $r$ ja korkeus $h$, niin kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Pythagoraan lauseesta saadaan yhteys $r^2 + h^2 = 1$. Jos muuttujaksi valitaan $h$, niin $V(h) = \frac{1}{3}\pi(1-h^2)h$, missä $0 \leqslant h \leqslant 1$. Funktion $V(h)$ arvo on suurin, kun funktion $f(h) = (1-h^2)h$ arvo on suurin. Jos muuttujaksi valitaan $r$, niin $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{1-r^2}$, missä $0 \leqslant r \leqslant 1$. Funktion $V(r)$ arvo on suurin, kun funktion $g(r) = r^2\sqrt{1-r^2}$ arvo on suurin. Koska $g(r) = \sqrt{r^4(1-r^2)}$, funktio saa välillä $[0, 1]$ suurimman arvon samassa kohdassa kuin funktio $h(r) = r^4(1-r^2)$.)

**92.** halkaisijalla oleva sivu $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

kohtisuora sivu $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(Jos halkaisijalla oleva sivu on $2a$ ja korkeus $h$, niin pinta-ala on $A = 2ah$. Pythagoraan lauseesta saadaan yhteys $a^2 + h^2 = 1$. Jos muuttujaksi valitaan $a$, niin $A(a) = 2a\sqrt{1 - a^2}$, missä $0 \leqslant a \leqslant 1$. Koska välillä $[0, 1]$ on $a\sqrt{1 - a^2} = \sqrt{a^2(1 - a^2)}$, niin funktio $A(a)$ saa suurimman arvon samassa kohdassa kuin funktio $f(a) = a^2(1 - a^2)$.)

**93.** Kateetin pituus 2, jolloin hypotenuusan pituus on 4 ja toisen kateetin pituus $2\sqrt{3}$.
(Olkoon $x$ kateetin pituus, jolloin hypotenuusan pituus on $6 - x$. Toisen kateetin pituus on $\sqrt{36 - 12x}$ ja kolmion pinta-ala $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{36 - 12x}$, missä $0 \leqslant x \leqslant 3$.
Jos halutaan välttyä juurifunktion derivoimiselta, niin voidaan huomata: funktion $A(x)$ arvo on suurin, kun funktion $f(x) = x^2(36 - 12x)$ arvo on suurin.)

**94.** 10 m
(Piirretään vaakatuen päistä puolisuunnikkaan korkeusjanat ja valitaan muuttujaksi $x$ alhaalta kummastakin päästä erottuvan janan pituus. Katoksen leveys maassa on $2x + 5$, korkeus $\sqrt{25 - x^2}$ ja päädyn pinta-ala $A(x) = (x + 5)\sqrt{25 - x^2}$, missä $0 \leqslant x \leqslant 5$. Jos muuttujaksi valitaan katoksen korkeus, derivaattafunktion nollakohtien määrittäminen on hankalaa.)

**95.** 20 minuutin kuluttua. Tavarajuna on ohittanut risteyksen ja on siitä 4 kilometrin päässä. Matkustajajuna on lähestymässä risteystä 3 kilometrin päässä.
(Jos tavarajuna on alussa pisteessä $(26, 0)$ ja matkustajajuna pisteessä $(0, 43)$, niin $t$ tunnin kuluttua tavarajuna on pisteessä $(26 - 90t, 0)$ ja matkustajajuna pisteessä $(0, 43 - 120t)$.
Junien etäisyys on tällöin
$d(t) = \sqrt{(26 - 90t)^2 + (43 - 120t)^2}$.
Etäisyys on pienin, kun funktion
$f(t) = (26 - 90t)^2 + (43 - 120t)^2$ arvo on pienin.)

**96.** säteen $r$ pituinen, 82,7 %
(Jos vastaisen sivun pituus on $2x$, niin puolisuunnikkaan korkeus on $\sqrt{r^2 - x^2}$ ja pinta-ala $A(x) = (r + x)\sqrt{r^2 - x^2}$, missä $0 \leqslant x \leqslant r$.
Suurimman puolisuunnikkaan pinta-ala on $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$.)

**97.** $\frac{32}{81}\pi R^3$ (kartion korkeus $\frac{4R}{3}$ ja pohjaympyrän säde $\frac{R\sqrt{8}}{3}$)
(Voidaan olettaa, että kartion pohjaympyrä on pallon pinnalla ja pallon keskipiste on kartion sisällä niin, että korkeusjana kulkee pallon keskipisteen kautta. Yksinkertaisimmilla laskuilla päästään, kun muuttujaksi valitaan kartion pohjan etäisyys pallon keskipisteestä.)

**98.** 3,46 m (tarkka arvo $2\sqrt{3}$)
(Jos pohjaneliön sivun pituus on $2a$ metriä ja teltan korkeus $h$, niin teltan tilavuus on $V = \frac{1}{3}(2a)^2h$. Muuttujien $a$ ja $h$ välillä on yhteys $(a\sqrt{2})^2 + h^2 = 3^2$.)

**99.** Johto vedetään suoraan metsän läpi tien kohtaan, jonka etäisyys muuntajasta on 5,4 km, ja loppumatka vedetään pitkin tienvartta.

**100.** pisteeseen $(4{,}0;\ 0)$
(Jos leiri pystytetään pisteeseen $(x,\ 0)$, missä $0 \leqslant x \leqslant 8$, niin päivän mittaan kuljettava matka on $f(x) = 8 - x + 2\sqrt{x^2 + 49}$ . Funktio saa pienimmän arvon kohdassa $\frac{7}{\sqrt{3}}$ .)

**101.** 2 560 $\text{m}^2$ ja 1 440 $\text{m}^2$

**102.** $\sqrt{2}$ eli kolmio on tasakylkinen suorakulmainen kolmio.
(Jos kolmion kannan pituus on $2x$, niin kolmion pinta-ala on $A(x) = x\sqrt{1 - x^2}$, missä $0 \leqslant x \leqslant 1$.)

**103.** Kaikki sivut 2 m, eli kolmio on tasasivuinen kolmio.
(Jos kannan pituus on $2s$ ja kylkien pituus $t$, niin kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2} \cdot 2s \cdot \sqrt{t^2 - s^2}$ . Muuttujaksi kannattaa valita $s$. Koska $2s + 2t = 6$, niin $t = 3 - s$.)

**104.** vaakatuet 63 cm ja vinotuki 173 cm
(Jos muuttujaksi $x$ valitaan vaakatukien pituus metreinä, niin vinotuen pituus on $3 - 2x$ ja kehikon korkeus $\sqrt{9 - 12x + 3x^2}$ . Tulee olla $0 \leqslant x \leqslant 1$.)

**105.** 4,5 m

**106.** 55 cm
(Muuttujaksi $x$ kannattaa valita leikkauskohdan etäisyys sivun keskipisteestä. Teltan korkeus on silloin $\sqrt{9 - x^2}$ .)

**107.** Etäisyys on pienin 12 minuutin kuluttua.
Lapsi ei kuule huhuilua, sillä etäisyys on tällöin 450 m.
(Sijoitetaan tarina koordinaatistoon. Jos lapsi on nyt koordinaatiston pisteessä $(1,\ 0)$ ja etsijä pisteessä $(0,\ 1)$, niin $t$ tunnin kuluttua lapsi on pisteessä $(1 - 3t,\ 0)$, etsijä pisteessä $(0,\ 1 - 6t)$ ja etäisyys on $d(t) = \sqrt{(1 - 3t)^2 + (1 - 6t)^2}$ . Funktio $d(t)$ saa pienimmän arvon samassa kohdassa kuin funktio $f(t) = (1 - 3t)^2 + (1 - 6t)^2$.)

**108.** $\sqrt{2}$
(Valitaan muuttujaksi $x$ pisteen $P$ etäisyys ympyrän keskipisteestä, jolloin on $x > 1$. Kolmion kannan pituuden puolikas $a$ saadaan yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista: $\frac{a}{1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .)

**109.** $2\sqrt{5}R$
(Jos suorakulmion ympyrän halkaisijalla olevan sivun pituus on $2a$ ja suorakulmion korkeus $h$, niin piiri on $4a + 2h$. Muuttujien $a$ ja $h$ välillä on yhteys $a^2 + h^2 = R^2$.)

**110.** $\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$, 41,3 %
(Voidaan olettaa, että ympyrän keskipiste on kolmion sisällä kannalle piirretyllä korkeusjanalla. Jos $x$ on kannan etäisyys keskipisteestä, niin kolmion korkeus on $x + r$ ja kannan pituus $2\sqrt{r^2 - x^2}$, missä $0 \leqslant x \leqslant r$. Kolmion pinta-alan ilmaiseva funktio saa suurimman arvon derivaattafunktion nollakohdassa $\frac{r}{2}$ .)

**111.** leveys 3,24 m ja korkeus 2,29 m
(Jos teltan leveys on $2a$ metriä ja korkeus $h$, niin katon pinta-ala on $A = 4a\sqrt{a^2 + h^2}$ . Muuttujien $a$ ja $h$ välillä on yhteys $\frac{1}{3}(2a)^2 h = 8$.)

**112.** korkeus 3,32 m ja pohjan säde 2,35 m
(Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{s^2 - r^2}$, missä muuttujien $s$ ja $r$ välillä on yhteys $\pi rs = 30$.)

**113.** Kuljetaan pisteeseen $(3, 3)$ pitkin suoraa $y = x$ ja loppumatka linnuntietä metsän halki.
(Jos kuljetaan origosta pisteeseen $(x, x)$ pitkin suoraa $y = x$ ja loppumatka linnuntietä pisteeseen $(10, 2)$ ja jos nopeus polulla on $v$, niin matkaan kuluva aika on
$$\frac{x\sqrt{2}}{v} + \frac{\sqrt{(10-x)^2 + (2-x)^2}}{0{,}6v}.$$
Funktion arvo on pienin, kun funktion
$$f(x) = x\sqrt{2} + \frac{5}{3}\sqrt{(10-x)^2 + (2-x)^2}$$
arvo on pienin.)

**114.** 19,7 km pitkä, erkaantumiskohta 14,6 km risteyksestä itään
(Onnekas valinta muuttujaksi on kylän ja toisen tien väliin jäävän tien osan pituus. Jos matka kylästä itään kulkevalle tielle on $x$, niin tien toisen osan pituus on $\frac{8x}{\sqrt{x^2 - 36}}$ (yhdenmuotoiset kolmiot) ja koko tien pituus on
$$f(x) = x + \frac{8x}{\sqrt{x^2 - 36}}.$$
Muita mahdollisia muuttujia ovat erkaantumiskohdan etäisyys teiden risteyksestä, erkaantumiskohdan etäisyys kylää lähinnä olevasta tien kohdasta ja pisteen $(8, 6)$ kautta kulkevan laskevan suoran kulmakerroin. Kaikille näille muuttujille on ominaista, että tien pituuden ilmaisevaan funktioon tulee neliöön korotettu binomi. Derivaatan nollakohtien löytyminen edellyttää, että derivoitaessa ja derivaattafunktiota sievennettäessä kyseinen binomi pidetään koko ajan näkyvillä.)

**115.** Putki, jonka pituus on enintään 8,32 m.
(Pisimmän mahtuvan putken pituus on toisen käytävän ulkoseinältä nurkan kautta toisen käytävän ulkoseinälle piirretyn lyhimmän janan pituus. Tehtävä on oleellisesti samanlainen kuin edellinen tehtävä.)

**116.** 78 cm:n etäisyydellä
(Hyvä valinta muuttujaksi on esimerkiksi vavan alapään etäisyys seinästä.)

## Logaritmi

**117.** 1,8 ja $-0{,}6$

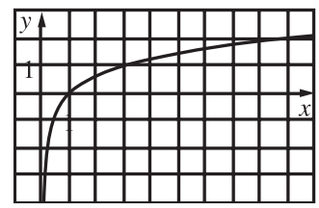
**118.** a) 12 b) 2 c) 1
d) $\frac{1}{2}$ e) 0 f) $-1$
g) $-8$

**119.** a) $5^{17}$ b) 625 c) 5
d) 1 e) $\frac{1}{5}$ f) $\frac{1}{25}$
g) $\frac{1}{5^{13}}$

**120.** a)

| $x$ | $\log_3 x$ |
|---|---|
| 9 | 2 |
| 3 | 1 |
| $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 0 |
| $\frac{1}{3}$ | $-1$ |
| $\frac{1}{9}$ | $-2$ |

b)




**121.** a) 11 b) 5
c) $-4$ d) $-14$

**122.** a) 9 b) 6 $(1\,000\,000 = 10^6)$
c) 2 d) 0
e) $-1$ $(0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1})$
f) $-34$

**123.** a) 7, 1, 0, $-1$ ja $-5$

b) $k^3$ ja $k^{-2} = \frac{1}{k^2}$

**124.** a) $7^4 = 2\,401$ b) $7^2 = 49$
c) 7 d) 1
e) $7^{-1} = \frac{1}{7}$ f) $7^{-3} = \frac{1}{343}$

**125.** a) $x = 125$ $(x = 5^3)$

b) $x = \frac{1}{25}$ $(x = 5^{-2})$

c) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ $(x = 5^{-\frac{1}{3}})$

**126.** a) $7 = 10^{\log_{10} 7} = 10^{\lg 7}$

b) $7 = 5^{\log_5 7}$

**127.** a) 6 b) 3

**128.** a) 4 (Tulee olla $k^2 = 16$ ja $k > 0$.)
b) 9

**129.** a) 1,9

b) $4{,}4 \cdot 10^{-13}$ $\left(\lg x = \frac{-2{,}1}{0{,}17}\text{, joten } x = 10^{\frac{-2{,}1}{0{,}17}}.\right)$

**130.** a) 21 000 MWh, 24 tunnissa
(Yhtälöstä $3{,}2 + 0{,}67 \lg E = 6{,}1$ saadaan
$\lg E = \frac{2{,}9}{0{,}67}$, joten $E = 10^{\frac{2{,}9}{0{,}67}}$.)

b) 21 000-kertainen $(3{,}2 + 0{,}67 \lg E = 9{,}0)$

**131.** a) $-1{,}4$ richteriä
$(M = 3{,}2 + 0{,}67 \lg (0{,}15 \cdot 10^{-6}))$
b) 1,9 richteriä
c) 140 miljardin

**132.** a) 7 b) 3 c) 1
d) 0 e) $-1$ f) $-2$
g) $-9$

**133.** a) $6^5 = 7\,776$ b) $6^{-4} = \frac{1}{1\,296}$

**134.** a) $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$, sillä $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$

$\log_7 7\sqrt{7} = \frac{3}{2}$, sillä

$7\sqrt{7} = 7 \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{1+\frac{1}{2}} = 7^{\frac{3}{2}}$

$\log_7 \frac{1}{\sqrt{7}} = -\frac{1}{2}$, sillä $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{7^{\frac{1}{2}}} = 7^{-\frac{1}{2}}$

b) luvun $7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}$

**135.** a) 14 b) 4 c) 2
d) 1 e) $\frac{1}{2}$ f) 0
g) $-3$ h) $-10$

**136.** a) 216 b) 6 c) 1
d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{6\sqrt{6}}$ f) $\frac{1}{36}$

**137.** a) 9, 5, 1, 0 ja $-3$
b) $x = 10\,000$ ja $x = 0{,}01$

**138.** a) 1 024 b) 19 683 c) $\frac{1}{128}$

**139.** a) $5 = 10^{\lg 5}$ b) $5 = 3^{\log_3 5}$

**140.** a) 9 b) 7 c) $\frac{1}{9}$

**141.** a) 6 b) 4

**142.** a) 9 b) $9 \cdot 3 = 27$
c) $9 \cdot 8 = 72$

**143.** a) 12 b) 4
c) $12 + 4 = 16$ d) $12 - 4 = 8$

**144.** a) ISO 400/27° ja ISO 2000/34°
b) ISO 40/17° ja ISO 3200/36°

**145.** a) 60 dB b) 110 dB c) 140 dB

**146.** a) $10^{-12}$ W/m$^2$
b) $-20$ dB
c) $3{,}2 \cdot 10^{-7}$ W/m$^2$

**147.** 300 metrin etäisyydellä

## Logaritmikaavat

**148.** a) 2 b) $2\ (\log_5 \frac{10^2}{4})$

**149.** 3

**150.** a) $3 \log_k a$ b) $\frac{1}{2} \log_k a \quad (\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}})$
c) $-\log_k a$ (Voidaan käyttää joko potenssin logaritmikaavaa: $\log_k \frac{1}{a} = \log_k a^{-1}$, tai osamäärän logaritmikaavaa: $\log_k \frac{1}{a} = \log_k 1 - \log_k a$.)
d) $-3 \log_k a$

**151.** $\log_k \sqrt{ab} = \log_k (ab)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_k (ab)$
$= \frac{1}{2} (\log_k a + \log_k b)$

**152.** $x = 4$
(Yhtälö on määritelty, kun $x > 3$. Yhtälö tulee muotoon $\log_3 ((x-1)(x-3)) = \log_3 3$, josta saadaan yhtälö $(x-1)(x-3) = 3$.)

**153.** $x = 9$
(Yhtälö on määritelty, kun $x > 7$. Yhtälö tulee muotoon $\log_2 ((x-1)(x-7)) = \log_2 2^4$ eli $(x-1)(x-7) = 16$.)

**154.** 25

**155.** $x = 3$
$(\log_2 (x+1)^2 = \log_2 2(x+5))$

**156.** a) $x = 3$ b) $x = 3$ tai $x = -3$
c) Ei ole, sillä funktio $\log_2 (x+1) + \log_2 (x-1)$ on määritelty, kun $x > 1$, ja funktio $\log_2 (x^2 - 1)$ on määritelty, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

**157.** $x = \sqrt{7}$

**158.** Jos $a = k^r$ ja $b = k^s$, niin $\frac{a}{b} = \frac{k^r}{k^s} = k^{r-s}$.
Kaava seuraa, kun $r$, $s$ ja $r - s$ tulkitaan $k$-kantaisiksi logaritmeiksi.

**159.** a) 1 b) $-1$

**160.** a) $-\log y$ b) $\log x$

**161.** $\log (\sqrt{a+1} + \sqrt{a}) + \log (\sqrt{a+1} - \sqrt{a})$
$= \log ((\sqrt{a+1} + \sqrt{a})(\sqrt{a+1} - \sqrt{a}))$
$= \log ((\sqrt{a+1})^2 - (\sqrt{a})^2) = \ldots$

**162.** a) $4 \lg a$ b) $\frac{1}{3} \lg a$
c) $-\frac{1}{2} \lg a$ d) $-5 \lg a$

**163.** 4

**164.** $x = -2$

**165.** $x = 9$
(Yhtälö $\frac{1}{2} (\log_2 (x+7) + \log_2 (x-5)) = 3$ eli $\log_2 (x+7) + \log_2 (x-5) = 6$.)

**166.** $x = 5$
$(\lg \frac{(2x)^2}{x+5} = \lg 10$, missä $x > 0$.)

**167.** $x = -1$

**168.** $2 \log_2 (\sqrt{3} - 1) = \log_2 (\sqrt{3} - 1)^2$
$= \log_2 (4 - 2\sqrt{3}) = \ldots$

**169.** $y = \log_9 x$ ja $2y = \log_3 x$, joten $\log_3 x = 2 \log_9 x$

**170.** a) Jos $x = k^y$, niin $x = \left(\frac{1}{k}\right)^{-y}$.

b) Jos $x = k^y$, niin $x = (k^2)^{\frac{y}{2}}$.

c) $\log_{k^r} x = \frac{1}{r} \log_k x$

**171.** a) Osoitetaan, että jos $a^r = b$ ja $b^s = c$, niin $a^{rs} = c$.

b) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$, $\log_2 x = \frac{\lg x}{\lg 2}$

**172.** Osoitetaan, että jos $x = k^r$ ja $a = k^s$, niin $(ak)^{\frac{r}{1+s}} = x$.

## Logaritmin sovelluksia

**173.** $3^{4903}$

**174.** 1205
(Koska $\lg 4^{2000} \approx 1\,204{,}1$, niin $10^{1204} < 4^{2000} < 10^{1205}$.)

**175.** a) $x \approx 1{,}63$ $\left(x = \frac{\lg 6}{\lg 3}\right)$

b) $x \approx 11{,}0$

c) Ei ratkaisua.

**176.** a) 3,170 ($\log_2 9$ on yhtälön $2^x = 9$ ratkaisu: $\log_2 9 = \frac{\lg 9}{\lg 2}$.)

b) $-0{,}6523$

**177.** 27 vuoden kuluttua
(Epäyhtälö $1{,}0180^x \cdot 5\,000 > 8\,000$ toteutuu, kun $x > \frac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}0180}$.)

**178.** vuonna 2020

**179.** 14 vuodessa
(Jos loukkaantuneiden määrä nyt on $a$, niin $x$ vuoden kuluttua loukkaantuneiden määrä on $0{,}95^x\, a$. Määrän $a$ tulee vähetä alle määrän $0{,}5a$. Epäyhtälöstä $0{,}95^x\, a < 0{,}5a$ jaetaan heti $a$ pois.)

**180.** 99 vuoden kuluttua
(Jos aineen määrä nyt on $a$, niin $x$ vuoden kuluttua määrä on $0{,}977^x\, a$. Määrän tulee alittaa $0{,}1a$. Epäyhtälöstä $0{,}977^x\, a < 0{,}1a$ jaetaan heti $a$ pois.)

**181.** a) 7,0 %
(Jos liikevaihto nyt on $a$ ja liikevaihto tulee joka vuosi $k$-kertaiseksi, niin kuuden vuoden kuluttua liikevaihto on $k^6 a$. Tulee olla $k^6 a = 1{,}5a$ eli $k^6 = 1{,}5$.)
b) 11 vuodessa

**182.** yli 380 henkilöä
(Todennäköisyys, että $n$ henkilön ryhmässä ei ole yhtään AB– -ryhmään kuuluvaa, on $0{,}988^n$. Todennäköisyys, että ainakin yksi kuuluu AB– -ryhmään on $1 - 0{,}988^n$. Tulee olla $1 - 0{,}988^n > 0{,}99$ eli $0{,}988^n < 0{,}01$.)

**183.** yli 1 150 kuljettajaa
(Tulee olla $1 - 0{,}998^n > 0{,}90$ eli $0{,}998^n < 0{,}10$.)

**184.** $x \approx 0{,}58$
(Yhtälö voidaan jakaa lausekkeella $9^x$, jolloin saadaan yhtälö $4 \cdot 2^x = 6$. Voidaan myös merkitä molempien puolien 10-kantaiset logaritmit yhtäsuuriksi ja käyttää logaritmikaavoja, jolloin saadaan yhtälö $\lg 4 + x \lg 18 = \lg 6 + x \lg 9$.)

**185.** $7^{1851} < 5^{2239} < 10^{1565}$

**186.** 2 185

**187.** a) $x \approx 4{,}78$ b) $x \approx 14{,}9$

**188.** a) 2,322 b) $-3{,}192$

**189.** $\log_2 x = \dfrac{\lg x}{\lg 2}$

**190.** $3^{15}$, $3^{2096}$

**191.** 14 vuoden kuluttua

**192.** a) 34 vuorokaudessa
b) 23 000 vuodessa
(Tulokset on pyöristetty normaaleilla pyöristyssäännöillä kahden numeron tarkkuuteen.)

**193.** 19 viikossa

**194.** vuonna 2009
(Potenssiyhtälöstä $k^7 \cdot 758 = 885$ saadaan vuotuinen kasvukerroin $k \approx 1{,}0224$.)

**195.** yli 4 600

**196.** vähintään 25 heittoa

**197.** vuonna 2022

**198.** 196 vuoden kuluttua

**199.** a) 16 000 vuotta sitten
b) noin vuodelta 1500 ennen ajanlaskun alkua

**200.** 9 152 052 numeroa, luku alkaa 315 ...
(Luvun alku voidaan laskea 10-kantaisen logaritmin desimaaliosan avulla.)

**201.** $2{,}14 \cdot 10^{-1701}$, 1 700 nollaa

## Neperin luku *e* ja luonnollinen logaritmi

**202.** a) $3e^x$ b) $5 - 4e^x$

**203.** a) $-3$ ja $0$ $(f'(x) = (3x^2 + x^3)e^x)$
b) 3 (Käytetään osamäärän derivointikaavaa, jolloin saadaan $g'(x) = \dfrac{(x-3)e^x}{x^4}$.)

**204.** $f(1) = -e$ $(f'(x) = (x-1)e^x)$

**205.** Derivaattafunktio $g'(x) = (x^2 + 1)e^x$ on kaikkialla positiivinen, koska kaikilla $x$ on $x^2 + 1 > 0$ ja $e^x > 0$.

**206.** a) 4 ja $-1$
b) $e^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$

**207.** a) $e^{\ln 7} = 7$ ja $e^{-\ln 7} = \dfrac{1}{e^{\ln 7}} = \dfrac{1}{7}$
b) $5 = e^{\ln 5}$

**208.** a) $x = \ln 4$ b) Ei juuria.
c) $x = \ln \dfrac{1}{4} = -\ln 4$ $\left(e^x = \dfrac{1}{4}\right)$

**209.** pisteeseen $(\ln 2, 2 + \ln 2)$
$(f'(x) = 3$, kun $x = \ln 2)$

**210.** suurin $e - 7$, pienin $7 - 7 \ln 7$
(Välillä $]1, 2[$ on derivaattafunktion $f'(x) = e^x - 7$ nollakohta $\ln 7 \approx 1{,}95$.)

**211.** $(1, e)$
(Funktion $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ pienin arvo välillä $]0, \infty[$ on $f(1) = e$.)

**212.** Yhtälö $2x - 2y + 1 = 0$ on ratkaistussa muodossa $y = x + \dfrac{1}{2}$. Osoitetaan, että

$e^x - x \geqslant x + \dfrac{1}{2}$ kaikilla $x$. Erotusfunktion

$f(x) = e^x - 2x - \dfrac{1}{2}$ pienin arvo on

$f(\ln 2) = 2 - 2 \ln 2 - \dfrac{1}{2} \approx 0{,}1 > 0$.

Koska funktion $f$ pienin arvo on positiivinen, niin $f(x) > 0$ kaikilla $x$.

**213.** Pisteeseen $(a, e^a)$ piirretyn tangentin yhtälö on $y - e^a = e^a(x - a)$. Tangentti leikkaa $x$-akselin pisteessä $(a - 1, 0)$. Siis janan pituus on aina 1.

**214.** $f'(x) = x^4e^x + 4x^3e^x$,
$f''(x) = x^4e^x + 8x^3e^x + 12x^2e^x$

**215.** Koska $e^x > 0$ kaikilla $x$ ja $x^2 \geqslant 0$ kaikilla $x$, niin $f'(x) = 3e^x + 3x^2 > 0$ kaikilla $x$.

**216.** $f(-1) = -\frac{1}{e}$

**217.** maksimikohta 1 ja maksimiarvo $3e$, minimikohta 2 ja minimiarvo $e^2$

**218.** a) 0, 1 ja $-2$ b) $e^3$ ja $e^{-1} = \frac{1}{e}$

**219.** a) 5, $\frac{1}{3}$ ja 8

b) $6 = e^{\ln 6}$

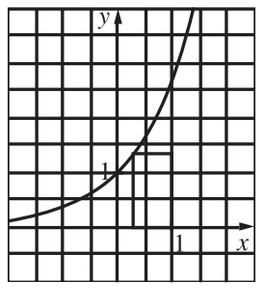
**220.** a) $\ln 2$ b) ei nollakohtia

c) $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

**221.** Erotusfunktion $f(x) = 5e^x - x - 1 - \ln 5$ pienin arvo on $f(\ln \frac{1}{5}) = 0$. Koska funktion $f$ pienin arvo on 0, niin $f(x) \geqslant 0$ kaikilla $x$.

**222.** Leikkauspisteet ovat $(0, -1)$ ja $(-2, -e^{-2})$. Funktion $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$ derivaatta kohdassa 0 on 1 ja funktion $g(x) = -e^x$ derivaatta kohdassa 0 on $-1$. Koska $1 \cdot (-1) = -1$, käyrille pisteeseen $(0, -1)$ piirretyt tangentit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

**223.** a)




b) $A(x) = (1 - x)e^x$, missä $x < 1$.

c) 1

**224.** pisteessä $(1, e)$, yhtälö $y = ex$

(Kuvaajan pisteeseen $(a, e^a)$ piirretyn tangentin yhtälö on $y - e^a = e^a(x - a)$. Tangentti kulkee origon kautta, kun $0 - e^a = e^a(0 - a)$.)

**225.** $a \geqslant 1$ (Derivaattafunktio $f'(x) = (x^2 + 2x + a)e^x$ on kaikkialla epänegatiivinen ja sillä on korkeintaan yksi nollakohta, kun yhtälön $x^2 + 2x + a = 0$ diskriminantti on negatiivinen tai nolla.)

**226.** Funktion $f(x) = \frac{e^x}{x^n}$ pienin arvo välillä $]0, \infty[$ on $f(n) = \frac{e^n}{n^n}$. Siis $f(x) \geqslant \frac{e^n}{n^n}$ kaikilla $x > 0$.

(Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = \frac{(x - n)e^x}{x^{n+1}}$.)

**227.** Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $f(x) = x^3e^x - 1$ on aidosti vähenevä välillä $]-\infty, -3]$ ja aidosti kasvava välillä $[-3, \infty[$. Funktiolla $f$ on kummallakin välillä korkeintaan yksi nollakohta. Välillä $]-\infty, -3]$ on $x^3 < 0$ ja siis $f(x) < 0$, joten funktiolla $f$ ei ole nollakohtaa välillä $]-\infty, -3]$. Koska $f(-3) < 0$ ja $f(1) > 0$, funktiolla $f$ on nollakohta välillä $[-3, \infty[$. Siis nollakohtia on täsmälleen yksi. Haarukoimalla saadaan nollakohdan likiarvo 0,77.

**228.** Leikkauspisteiden $x$-koordinaatit ovat erotusfunktion $h(x) = e^x - \sqrt{3 - 2x}$ nollakohtia.

Koska derivaattafunktio $h'(x) = e^x + \frac{1}{\sqrt{3 - 2x}}$ on koko määrittelyjoukossa $]-\infty, \frac{3}{2}[$ positiivinen, funktio $h$ on kaikkialla aidosti kasvava. Nollakohtia on siis korkeintaan yksi. Koska $h(0) = 1 - \sqrt{3} < 0$ ja $h(1) = e - 1 > 0$, välillä $]0, 1[$ on nollakohta. Siis nollakohtia (leikkauspisteitä) on yksi. Olkoon $x_0$ leikkauspisteen $x$-koordinaatti. Tällöin on $f(x_0) = g(x_0)$. Koska $f'(x) = e^x$ ja $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3 - 2x}}$, niin

$$f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -\frac{e^{x_0}}{\sqrt{3 - 2x_0}} = -\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = -1.$$

Siis käyrät leikkaavat kohtisuorasti.

**229.** Tutkitaan erotusfunktiota

$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$.

Osoittautuu, että $f''(x) > 0$ välillä $]0, \infty[$, joten $f'$ on aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$. Koska $f'(0) = 0$, niin $f'(x) > 0$ välillä $]0, \infty[$. Siis funktio $f$ on aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$. Koska $f(0) = 0$, niin $f(x) > 0$ välillä $]0, \infty[$.

**230.** $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$,

$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

(Funktion $f(x) = e^x$ arvo kohdassa 0 ja jokaisen kertaluvun derivaatta kohdassa 0 on 1. Jos $T_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, niin ehdosta $T_3(0) = 1$ saadaan $a_0 = 1$, ehdosta $T_3'(0) = 1$ saadaan $a_1 = 1$, ehdosta $T_3''(0) = 1$ saadaan $a_2 = \frac{1}{2}$ jne.)

## Yhdistetty funktio

**231.** a) $h(x) = (6x + 7)^3$ b) $h(x) = e^{-3x}$

**232.** a) $\sqrt{3x + 1}$ b) $3\sqrt{x} + 1$

**233.** a) $h(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

b) $h(x) = e^{2x} - 3e^x + 1$

**234.** a) $e^{\frac{x}{2}}$ b) $\sqrt{e^x} = (e^x)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{x}{2}}$

**235.** a) $u(x) = \frac{1}{x}$

b) $u(x) = \frac{1}{x + 1}$

c) $u(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

**236.** a) esimerkiksi $s(x) = 1 - x^2$ ja $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

tai $s(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ja $u(x) = \frac{1}{x}$

tai $s(x) = x^2$ ja $u(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$

b) esimerkiksi $s(x) = x - 1$ ja $u(x) = x^4 + x^2$
tai $s(x) = (x - 1)^2$ ja $u(x) = x^2 + x$

**237.** a) $5e^{5x}$

b) $-6xe^{-3x^2}$

c) $-2x^3e^{-x^4}$

**238.** a) $\mathrm{D}(e^x)^2 = \mathrm{D}e^{2x} = 2e^{2x}$

b) $\mathrm{D}\frac{1}{e^{3x}} = \mathrm{D}e^{-3x} = -3e^{-3x}$

c) $\mathrm{D}\sqrt{e^x} = \mathrm{D}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$

**239.** a) $f'(x) = 2e^{-2x}$

($f(x) = e^xe^{-x} - e^xe^{-3x} = 1 - e^{-2x}$,

sillä $e^xe^{-x} = e^x\frac{1}{e^x} = 1$

(tai $e^xe^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$)

ja $e^xe^{-3x} = e^{x-3x} = e^{-2x}$.)

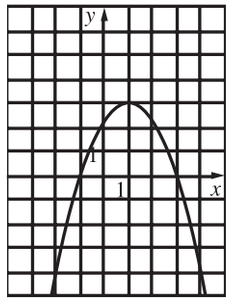
b) $g'(x) = 2e^{2x} + 18e^{-2x}$

($g(x) = e^{2x} - 9e^{-2x}$)

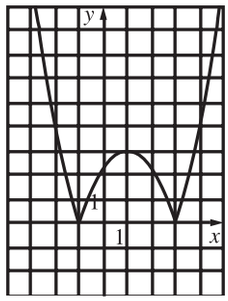
**240.** a) 81 (Funktion $f(x) = 4x - x^2$ suurin arvo on $f(2) = 4$.)

b) $e^{-3}$ (Funktion $f(x) = x^2 - 3$ pienin arvo on $f(0) = -3$.)

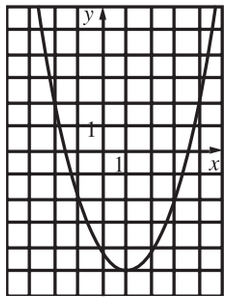
**241.** a)



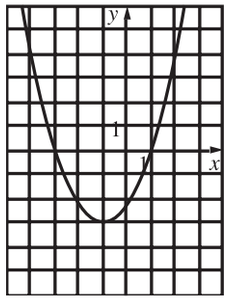

b)



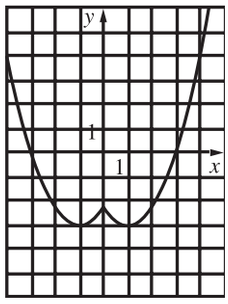

c)



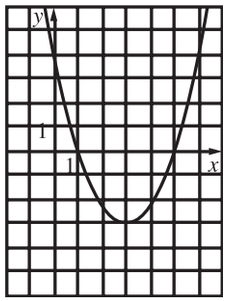

d)




e)




f)




**242.** a) 3 ja 1 b) 0 ja 1

**243.** a) $(x-4)^5 + 3(x-4)^3 + 2$

b) $\frac{1}{x^5} + \frac{3}{x^3} + 2$

**244.** a) $1 + e^{2x}$ b) $e^{2x}$

c) $e^x$ tai $-e^x$

**245.** a) esimerkiksi $u(x) = \frac{1}{x}$ ja $s(x) = 9x^2 + 1$

tai $u(x) = \frac{1}{x+1}$ ja $s(x) = 9x^2$

tai $u(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ja $s(x) = 3x$

b) esimerkiksi $u(x) = \frac{1}{x}$ ja $s(x) = 3^x$

tai $u(x) = 3^x$ ja $s(x) = -x$

c) esimerkiksi $u(x) = x^2 + 5x - 3$ ja $s(x) = x^{10}$

tai $u(x) = x^{10} + 5x^5 - 3$ ja $s(x) = x^2$

**246.** a) $u(x) = e^x$, $s(x) = 2x$

b) $u(x) = x^2$, $s(x) = e^x$

**247.** a) $\pi e^{\pi x}$ b) $6x e^{\frac{1}{2}x^2}$ c) $-3e^{-6x}$

**248.** a) $3e^{-x}$ (Jaetaan termeittäin:

$f(x) = 1 - \frac{3}{e^x} = 1 - 3e^{-x}$.)

b) $e^x - e^{-x}$

**249.** a) $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$

$(f(x) = e^{2x} + 2 + e^{-2x})$

b) $g'(x) = -2e^{-x} - 2e^{-2x}$

$(g(x) = 1 + 2e^{-x} + e^{-2x})$

**250.** a) $e^9$ b) 262 144 $(= 4^9)$

c) 59 049 $(= 9^5)$

(Funktion $f(x) = 6x - x^2$ suurin arvo on 9. Koska funktiot $e^x$, $4^x$ ja $x^5$ ovat aidosti kasvavia, niin yhdistettyjen funktioiden $e^{f(x)}$, $4^{f(x)}$ ja $f(x)^5$ arvo on suurin, kun sisäfunktion $f(x)$ arvo on suurin.)

**251.** a) $12e^{3x}(e^{3x}-1)^3$

b) $-6(4x-1)^2\, e^{-\frac{1}{2}(4x-1)^3}$

c) $(e^{-x}-xe^{-x})e^{xe^{-x}}$

**252.** Esimerkiksi $f(x)=x^2$ ja $g(x)=x^3$. Keksi lisää.

**253.** a) $f(x)=x^2-x+2$ $(f(x)=f((x+1)-1))$

b) $g(x)=3x-5\ln x$ $(g(x)=g(e^{\ln x}))$

## Eksponenttifunktiot

**254.** a) $5^x \ln 5$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\frac{1}{2}$ $(=-2^{-x}\ln 2)$

**255.** a) $m(t)=7{,}0\cdot 0{,}976^t \approx 7{,}0e^{-0{,}0243t}$

b) 0,13 kg/a ja 0,050 kg/a
$(m'(10)$ ja $m'(50))$

**256.** $y=-4x+1$ (Kuvaaja leikkaa $y$-akselin pisteessä (0, 1). Tangentin kulmakerroin on $f'(0)$.)

**257.** $\frac{\ln 9}{3}$ $(f'(x)=3e^{3x}-27,\ f'(x)=0$, kun $e^{3x}=9)$

**258.** $f(\frac{\ln 3}{2})=3-3\ln 3$

**259.** $[-\frac{1}{2}e^{-1}, \infty[$ eli $[-\frac{1}{2e}, \infty[$

(Funktion $f$ pienin arvo on $f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}e^{-1}$.
Koska funktion $f$ arvot suurenevat rajatta, kun muuttujan $x$ arvot suurenevat rajatta, funktio $f$ saa kaikki arvoa $-\frac{1}{2}e^{-1}$ suuremmat reaaliarvot.)

**260.** Erotusfunktion $f(x)=e^{3x}-27e^x+55$ pienin arvo on $f(\ln 3)=1>0$. Koska funktion $f$ pienin arvo on positiivinen, niin $f(x)>0$ kaikilla $x$.
$(f'(x)=3e^{3x}-27e^x=3e^x(e^{2x}-9))$

**261.** ln 3
$(f'(x)=e^{2x}-e^x-6$. Kun merkitään $e^x=u$, saadaan yhtälö $u^2-u-6=0$, joka toteutuu, kun $u=3$ tai $u=-2$. Siis $e^x=3$ tai $e^x=-2$.)

**262.** a) $e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}$

b) aidosti kasvava, kun $x\leqslant 0$, ja aidosti vähenevä, kun $x\geqslant 0$

c) Kasvavat nopeimmin arvon $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ kohdalla ja vähenevät nopeimmin arvon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ kohdalla. (Kohdat, joissa derivaattafunktion $f'(x)=-2xe^{-x^2}$ arvo on suurin ja pienin.)

**263.** a) $m(t)=3\cdot 0{,}5^{\frac{t}{8}} \approx 3e^{-0{,}0866t}$

b) 0,18 kg/d ja 0,11 kg/d

**264.** $f'(x)=10^x\ln 10$, $f'(0)\approx 2{,}30$ ja $f'(3)\approx 2\,300=2{,}30\cdot 10^3$

**265.** a) $b(t)=7500\cdot 7{,}9^t \approx 7500e^{2{,}07t}$

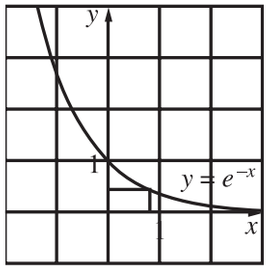
b) 120 000 bakteeria/tunti ja
480 miljoonaa bakteeria/tunti

**266.** Suoran kulmakerroin on sivuamispisteeseen $(x,\ e^{\frac{1}{2}x^2})$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Tangentin kulmakerroin on $f'(x)=xe^{\frac{1}{2}x^2}$ ja siis sivuamispisteen koordinaattien tulo.

**267.** a) $-\ln 2$ b) 0 ja 2 c) $-2$

**268.** a)




b) $\frac{1}{e}$ (Muuttujaksi $x$ valitaan $x$-akselilla olevan sivun toisen päätepisteen $x$-koordinaatti. Suorakulmion pinta-ala on $A(x) = xe^{-x}$, missä $x > 0$.)

**269.** ln 8
($f'(x) = 3e^{3x} - 24e^{2x} = 3e^{2x}(e^x - 8)$)

**270.** Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x + 1$. Jos merkitään $e^x = u$, niin nähdään, että derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia. Koska $f'(0) = 1$, $f'(x) > 0$ kaikilla $x$.

**271.** a) $g(-\ln 2) = 4$
b) $[4, \infty[$
(Kun muuttujan arvot suurenevat rajatta, niin funktion $e^x$ arvot suurenevat rajatta ja funktion $e^{-x}$ arvot lähenevät nollaa. Siis funktion $g(x)$ arvot suurenevat rajatta.)

**272.** 4,0 metrin etäisyydellä pienemmästä tuhoajasta
(Jos $k_1$ on pienemmän tuhoajan koko, niin $x$ metrin etäisyydellä suuremmasta tuhoajasta yhteisvaikutus on
$8k_1e^{-x} + k_1e^{-(10-x)} = k_1(8e^{-x} + e^{-(10-x)})$.
Yhteisvaikutus on pienin, kun funktion $f(x) = 8e^{-x} + e^{-(10-x)} = 8e^{-x} + e^{-10}e^x$, missä $0 \leqslant x \leqslant 10$, arvo on pienin.)

**273.** pistettä $(0, \frac{1}{2})$

(Normaalin yhtälö on $y - e^{-a^2} = \frac{e^{a^2}}{2a}(x - a)$.
Normaali leikkaa $y$-akselin pisteessä
$(0, e^{-a^2} - \frac{1}{2}e^{a^2})$.)

**274.** $-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$ ($g'(x) = \ln 2\, e^{x \ln 2} - 1$, joten
$g'(x) = 0$, kun $e^{x \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$.)

**275.** a) vuonna 2091, Yhdysvallat 680 miljoonaa, Venezuela 260 miljoonaa
(Tutkitaan funktiota
$f(x) = 250 \cdot 1{,}01^x - 20 \cdot 1{,}026^x$
$= 250\, e^{x \ln 1{,}01} - 20\, e^{x \ln 1{,}026}$.
Derivaattafunktio on
$f'(x) = 250 \ln 1{,}01\, e^{x \ln 1{,}01} - 20 \ln 1{,}026\, e^{x \ln 1{,}026}$.
$f'(x) = 0$, kun
$e^{x(\ln 1{,}01 - \ln 1{,}026)} = \frac{20 \ln 1{,}026}{250 \ln 1{,}01}$.)
b) vuonna 2151 (Eksponenttiyhtälö $20 \cdot 1{,}026^x = 250 \cdot 1{,}01^x$.)

**276.** Funktion $k^x$ kuvaajalle pisteeseen $(a, k^a)$ piirretyn tangentin yhtälö on
$y - k^a = k^a \ln k\,(x - a)$. Sivuamispisteen $x$-koordinaatti on $\frac{1}{\ln k}$ ja $y$-koordinaatti
$k^{\frac{1}{\ln k}} = (e^{\ln k})^{\frac{1}{\ln k}} = e$, joka siis ei riipu $k$:sta.

**277.** a) $f'(x) = 2x3^{x^2} \ln 3$
b) $3^{2^x}\, 2^x \ln 3 \ln 2$

## Logaritmifunktion derivaatta

**278.** a) $\frac{5}{x}$

b) $\frac{1}{x}$ $(\ln 5x = \ln 5 + \ln x)$

c) $\frac{1}{3x}$ $(\frac{\ln x}{3} = \frac{1}{3}\ln x)$

d) $\frac{1}{x}$ $(\ln \frac{x}{3} = \ln x - \ln 3)$

e) $\frac{1}{3x}$ $(\frac{\ln 6x}{3} = \frac{1}{3}\ln 6 + \frac{1}{3}\ln x)$

**279.** a) $-\frac{1}{x}$ $(\ln \frac{3}{x} = \ln 3 - \ln x)$

b) $-\frac{1}{x}$ $(\ln \frac{3}{5x} = \ln 3 - \ln 5 - \ln x)$

c) $\frac{3}{x}$ $(\ln x^3 = 3 \ln x)$

**280.** a) $e^{-\frac{1}{2}}$ $(f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) = 0,$ kun $\ln x = -\frac{1}{2}$.)

b) $e^{\frac{1}{2}}$ $(g'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3})$

**281.** Aidosti kasvava välillä $]0, e]$, aidosti vähenevä välillä $[e, \infty[$. Suurin arvo on $\frac{1}{e}$.

$(f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2})$

**282.** pisteessä $(\frac{1}{2}, \ln \frac{1}{2})$ eli $(\frac{1}{2}, -\ln 2)$,
yhtälö $y = 2x - 1 - \ln 2$
(Funktion $f(x) = \ln x$ kuvaajalle muuttujan arvon $x$ kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(x)$. Tulee olla $f'(x) = 2$.)

**283.** a) $(e, 0)$ b) 1
(Jos $x$ on positiivisella $x$-akselilla olevan sivun toinen päätepiste, niin suorakulmion pinta-ala on $A(x) = x(1 - \ln x)$, missä $0 < x < e$. Funktio saa suurimman arvon kohdassa 1.)

**284.** Funktion $f(x) = x - 1 - \ln x$ pienin arvo on $f(1) = 0$. Koska funktion $f$ pienin arvo on 0, niin $f(x) \geqslant 0$ kaikilla $x > 0$. Siis $x - 1 \geqslant \ln x$ kaikilla $x > 0$.

Funktion $g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ pienin arvo on $g(1) = 0$. Koska funktion $g$ pienin arvo on 0, niin $g(x) \geqslant 0$ kaikilla $x > 0$.

Siis $\ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}$ kaikilla $x > 0$.

**285.** a) $\frac{2\ln x}{x}$ $(\mathrm{D}f(x)^2 = 2f(x)f'(x))$

b) $-\frac{1}{x(\ln x)^2}$ $(\mathrm{D}f(x)^{-1} = -1 \cdot f(x)^{-2} f'(x))$

Funktio $\frac{1}{\ln x}$ on määritelty, kun $x > 0$ ja $x \neq 1$.

**286.** a) määrittelyjoukko $\mathbb{R}$,
derivaattafunktio $\frac{4x^3}{x^4 + 3}$

b) määrittelyjoukko $]-\infty, \frac{3}{2}[$,
derivaattafunktio $-\frac{2}{3 - 2x}$

**287.** $\frac{2}{x} + \frac{1}{1 - x}$ $(f(x) = 2 \ln x - \ln(1 - x))$

**288.** $f(\frac{3}{2}) = 2 \ln \frac{3}{2}$ (Funktion $f$ määrittelyjoukko on $]0, 3[$.)

**289.** aidosti vähenevä välillä $]0, 2]$, aidosti kasvava välillä $[2, \infty[$
$(f'(x) = \frac{3x^2 - 12}{2x(x^2 + 12)}$, missä $x > 0)$

**290.** kaksi juurta, likiarvot 1,06 ja 3,86
(Erotusfunktio $f(x) = \ln(x-1) - 3\ln x + 3$ on aidosti kasvava välillä $]1, \frac{3}{2}]$ ja aidosti vähenevä välillä $[\frac{3}{2}, \infty[$. Kummallakin välillä funktiolla on korkeintaan yksi nollakohta, joten juuria on korkeintaan kaksi.
Koska $f(1{,}01) < 0$, $f(\frac{3}{2}) > 0$ ja $f(10) < 0$, juuria on tasan kaksi. Likiarvot löydetään haarukoimalla.)

**291.** a) $\frac{4}{x}$ b) $\frac{1}{x}$ c) $\frac{1}{2x}$

**292.** a) $-\frac{1}{x}$ b) $-\frac{6}{x}$

**293.** a) $\frac{2}{x}$ b) $\frac{1}{2x}$ c) $\frac{1}{3x}$

**294.** a) $e^{-2}$ b) $e^{\frac{1}{3}}$

**295.** suurin arvo $f(e) = e - 2$,
pienin arvo $f(2) = 2 - 2\ln 2$

**296.** $[2 + 2\ln 3, \infty[$
(Funktion $g$ pienin arvo on $g(3) = 2 + 2\ln 3$. Kun muuttujan $x$ arvot suurenevat rajatta, niin funktion $\frac{6}{x}$ arvot lähenevät nollaa ja funktion $\ln x$ arvot suurenevat rajatta. Siis funktion $g(x)$ arvot suurenevat rajatta, kun muuttujan $x$ arvot suurenevat rajatta.)

**297.** a) $\frac{\pi}{2e} \approx 0{,}58$ $(V(x) = \pi x^2(-\ln x))$

b) $\frac{4\pi}{e^2} \approx 1{,}7$ $(V(x) = \pi(-\ln x)^2 x)$

**298.** a) Pätee, sillä funktion $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ pienin arvo $f(4)$ on positiivinen.

b) Ei päde, sillä esimerkiksi $\ln 10 > \sqrt[3]{10}$.
(Havaintoon voi päätyä esimerkiksi graafisella laskimella piirretystä kuvaajasta.)

**299.** Jos $x_0$ on leikkauspisteen $x$-koordinaatti, niin leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat $f'(x_0) = -x_0$ ja $g'(x_0) = \frac{1}{x_0}$.
Koska kulmakertoimien tulo on $-1$, käyrät leikkaavat kohtisuorasti.

**300.** a) $\frac{3}{3x+1}$ b) $-\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

c) $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2x+2\sqrt{x}}$

**301.** määrittelyjoukko $]1, \infty[$,
derivaattafunktio $\frac{1}{x\ln x}$

**302.** määrittelyjoukko $]-2, 2[$,
$f'(x) = -\frac{2x}{4-x^2} - \frac{2x}{4+x^2}$

**303.** 3

**304.** yksi
(Funktio $f(x) = 5x + \ln(x-2)$ on aidosti kasvava koko määrittelyjoukossaan $]2, \infty[$, joten juuria on korkeintaan 1. Koska funktion $f$ arvot $f(2{,}00001)$ ja $f(3)$ ovat erimerkkiset, juuria on vähintään 1. Siis juuria on yksi.)

**305.** $f(x) = e^{x\ln x}$

a) aidosti vähenevä välillä $]0, \frac{1}{e}]$ ja aidosti kasvava välillä $[\frac{1}{e}, \infty[$

b) Pienin arvo $e^{-\frac{1}{e}}$ kohdassa $\frac{1}{e}$.
Suurinta arvoa ei ole.

**306.** Suurin arvo $e^{\frac{1}{e}}$ kohdassa $e$, pienintä arvoa ei ole.

**307.** muuttujan arvolla $e^{-\frac{1}{2}}$, pienin arvo $e^{-\frac{1}{2e}}$

**308.** $\mathrm{D}\log_k x = \dfrac{1}{x \ln k}$ ($k^{\log_k x} = x$ kaikilla $x$.

Derivoimalla molemmat funktiot saadaan

$k^{\log_k x} \ln k \cdot \mathrm{D}\log_k x = 1$.

Toinen tapa on ratkaista yhtälöstä $k^y = x$ potenssin logaritmikaavan avulla yhteys

$y = \dfrac{\ln x}{\ln k}$ eli $\log_k x = \dfrac{\ln x}{\ln k}$.)

**309.** $T_2(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$, $T_3(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

(Polynomille $T_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tulee olla $T_3(0) = f(0)$, $T_3'(0) = f'(0)$ jne.)

**310.** $r > \dfrac{1}{e}$

(Funktion $f(x) = x^r - \ln x$ pienin arvo on

$f(r^{-\frac{1}{r}}) = \dfrac{1}{r}(1 + \ln r)$.)

## Käänteisfunktio

**311.** a) $f^{-1}(8) = 4$, $f^{-1}(4) = 3$, $f^{-1}(1) = 2$, $f^{-1}(-1) = 1$, $f^{-1}(-2) = 0$ ja $f^{-1}(-3) = -2$

b) $f^{-1}(f(3)) = 3$ ja $f^{-1}(f(-1)) = -1$

c) $f(f^{-1}(1)) = 1$ ja $f(f^{-1}(6)) = 6$

**312.**

| $y$ | $f^{-1}(y)$ |
|---|---|
| $-4$ | 6 |
| $-1$ | 1 |
| 1 | 0 |
| 4 | $-4$ |

**313.** a) Ei ole.

b) On, $f^{-1}(y) = \sqrt[4]{y}$, missä $y \geqslant 0$.

c) On, $f^{-1}(y) = \sqrt[5]{y}$.

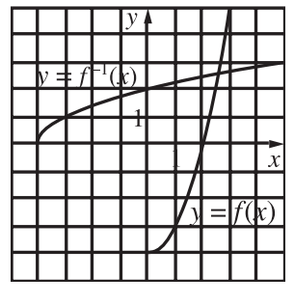
d) On, $f^{-1}(y) = \ln y$, missä $y > 0$.

**314.** a) Funktio $f(x) = x^2 - 4$ on aidosti kasvava, kun $x \geqslant 0$, joten funktiolla on käänteisfunktio. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $[-4, \infty[$.

b) $f^{-1}(y) = \sqrt{y+4}$, missä $y \geqslant -4$

(Yhtälöstä $x^2 - 4 = y$ saadaan $x = \sqrt{y+4}$ tai $x = -\sqrt{y+4}$. Koska $x \geqslant 0$, niin $x = \sqrt{y+4}$.)

c)




($f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, missä $x \geqslant -4$)

**315.** a) Funktio $f$ on kaikkialla aidosti kasvava, ja funktion $f$ arvojoukko on $\mathbb{R}$. Siis funktiolla on joukossa $\mathbb{R}$ määritelty käänteisfunktio.

b) $f^{-1}(x) = 2x + 2$

Tarkistus: $f(f^{-1}(x)) = f(2x + 2)$

$= \dfrac{1}{2}(2x + 2) - 1 = x + 1 - 1 = x$ ja

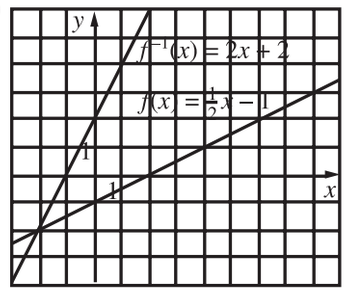
$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\dfrac{1}{2}x - 1)$

$= 2(\dfrac{1}{2}x - 1) + 2 = x - 2 + 2 = x$

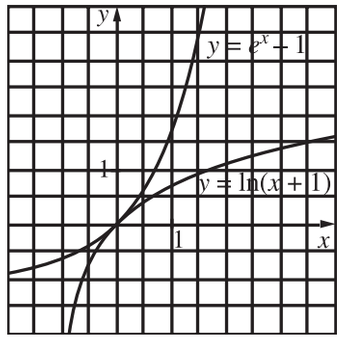
(Ratkaisemalla yhtälö $\dfrac{1}{2}x - 1 = y$ saadaan

$x = 2y + 2$. Siis $f^{-1}(y) = 2y + 2$, joten $f^{-1}(x) = 2x + 2$.)

c)



**316.** Derivaattafunktio $g'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ on positiivinen funktion $g$ koko määrittelyjoukossa $]-1, \infty[$, joten funktiolla $g$ on käänteisfunktio. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$ ja lauseke $g^{-1}(x) = e^x - 1$.




**317.** a) Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huipun $x$-koordinaatti on 2. (Voidaan myös tutkia derivaattafunktion merkkiä.)

b) $f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{y}$, missä $y \geqslant 0$

c) $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y}$, missä $y \geqslant 0$

**318.** a) $A = [-2, \infty[$, käänteisfunktion määrittelyjoukko $[-e^{-2}, \infty[$
(Derivaattafunktion $f'(x) = (x+2)e^x$ merkeistä nähdään, että funktio $f$ on aidosti kasvava välillä $[-2, \infty[$. Funktion $f$ pienin arvo välillä $[-2, \infty[$ on $f(-2) = -e^{-2}$. Kun muuttujan arvot suurenevat rajatta, niin funktion $f$ arvot suurenevat rajatta. Siis funktion $f$ arvojoukko on $[-e^{-2}, \infty[$.)

b) nollakohta 1 ja $f^{-1}(0) = -1$
($f(0) = 1$ ja $f(-1) = 0$)

**319.** a) Derivaattafunktio $f'(x) = 5x^4 + 3x^2$ on kaikkialla epänegatiivinen ja nolla vain kohdassa $x = 0$. Siis funktio $f$ on kaikkialla aidosti kasvava. Kun muuttujan arvot pienenevät rajatta, niin funktion $f$ arvot pienenevät rajatta, ja kun muuttujan arvot suurenevat rajatta, funktion $f$ arvot suurenevat rajatta.
Siis funktion $f$ arvojoukko on $\mathbb{R}$.

b) 3 ($f(0) = 3$)

c) $f^{-1}(1) = -1$ ja $f^{-1}(5) = 1$
(Huomataan, että $f(-1) = 1$ ja $f(1) = 5$.)

d) 0,84
(Määritetään haarukoimalla yhtälön $x^5 + x^3 + 3 = 4$ eli yhtälön $x^5 + x^3 - 1 = 0$ juuren likiarvo.)

**320.** a) $g^{-1}(9) = -2$, $g^{-1}(4) = -1$, $g^{-1}(2) = 0$, $g^{-1}(1) = 1$ ja $g^{-1}(0) = 3$

b) $g(g^{-1}(4)) = 4$ ja $g(g^{-1}(6)) = 6$

c) $g^{-1}(g(-1)) = -1$ ja $g^{-1}(g(\sqrt{2})) = \sqrt{2}$

**321.** a) Ei ole.

b) On, $f^{-1}(y) = \sqrt{y+1}$, missä $y \geqslant -1$.

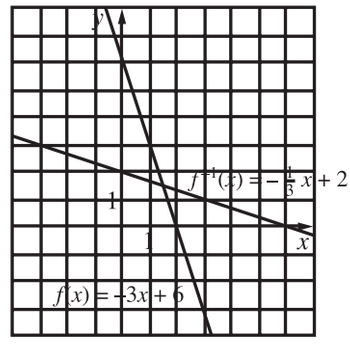
c) On, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-8}$.

d) On, $f^{-1}(y) = 3^y$.

**322.** a) Funktio $f$ on kaikkialla aidosti vähenevä, ja funktion $f$ arvojoukko on $\mathbb{R}$. Siis funktiolla on joukossa $\mathbb{R}$ määritelty käänteisfunktio.

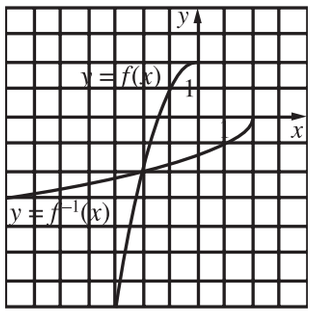
b) $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{3}x + 2$

c)



**323.** a) Funktio $2 - x^2$ on aidosti kasvava välillä $]-\infty, 0]$, joten funktiolla $f(x) = 2 - x^2$, missä $x \leqslant 0$, on käänteisfunktio. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $]-\infty, 2]$.

b) $f^{-1}(x) = -\sqrt{2 - x}$, missä $x \leqslant 2$




**324.** Derivaattafunktio $g'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ on kaikkialla positiivinen, joten funktiolla $g$ on käänteisfunktio. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $]1, \infty[$ ja lauseke $g^{-1}(x) = 2\ln(x - 1)$.

**325.** a) Derivaattafunktio $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}$ on positiivinen, kun $x > 0$, joten funktio $f$ on aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $[0, \infty[$.

b) $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2$, missä $x \geqslant 0$

**326.** a) $A = [-1, \infty[$, käänteisfunktion määrittelyjoukko $[-e^{-1}, \infty[$.

b) 0,57 (Määritetään haarukoimalla yhtälön $xe^x = 1$ eli yhtälön $xe^x - 1 = 0$ juuri.)

**327.** a) Funktio $f$ on kaikkialla aidosti kasvava, ja sen arvojoukko on $\mathbb{R}$.

b) nollakohta $-1$, $f^{-1}(-3) = -1$ ja $f^{-1}(9) = 2$

c) 0,68

**328.** a) Funktio $f(x) = x^2 - 2x + 3$ on aidosti vähenevä välillä $]-\infty, 1]$.

$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x - 2}$, missä $x \geqslant 2$

b) Funktio $f(x) = x^2 - 2x + 3$ on aidosti kasvava välillä $[1, \infty[$.

$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$, missä $x \geqslant 2$

**329.** Funktion derivaattafunktio on kaikkialla positiivinen, joten funktio on kaikkialla aidosti kasvava.

$f^{-1}(x) = \ln(-1 + \sqrt{1 + x})$, missä $x > 0$

**330.** Funktio $f$ on kaikkialla aidosti kasvava, joten sillä on käänteisfunktio.
Kuvaajien leikkauspiste on $(2, 2)$ ja leikkauskulma $81{,}2°$.
(Leikkauspisteen $x$-koordinaatti saadaan yhtälöstä $f(x) = x$. Suora $y = x$ puolittaa kuvaajien välisen kulman.)

**331.** a) $\mathrm{D}\sinh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$ kaikilla $x$, joten funktiolla $\sinh x$ on käänteisfunktio. Funktion $\operatorname{arsinh} x$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.

b) $\mathrm{D}\cosh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0$ kaikilla $x > 0$, joten funktiolla $\cosh x$, missä $x \geqslant 0$, on käänteisfunktio. Funktion $\operatorname{arcosh} x$ määrittelyjoukko on $[1, \infty[$.

c) $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, missä $x \geqslant 1$

d) $\mathrm{D}\operatorname{arsinh} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$,

$\mathrm{D}\operatorname{arcosh} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $x > 1$

## Kertaustehtäviä

**332.** a) $]-\infty, -5]$ $(x \leqslant -5)$
b) $]-\infty, -5[$ $(x < -5)$
c) $\mathbb{R}$

**333.** a) $[-5, 5]$ $(-5 \leqslant x \leqslant 5)$
b) $[-3, 5[$ $(-3 \leqslant x < 5)$

**334.** a) $\frac{1}{9}$ b) $-125$
c) Ei ratkaisua. d) 4
(Yhtälön $x\sqrt{x} = 8$ molemmat puolet korotetaan potenssiin 2.)

**335.** a) $x = -1$ tai $x = 3$ (Yhtälön neliöönkorotusehto on $x \geqslant -1$.)

b) $x = -3$ (Yhtälön $\sqrt{x+7} = -x - 1$ neliöönkorotusehto on $x \leqslant -1$.)

**336.** a) $\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}$

b) $\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ $\quad (\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}})$

**337.** a) $-\frac{1}{6x\sqrt{x}}$ $\quad (\frac{1}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}})$

b) $\frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$ $\quad (x^3\sqrt{x} = x^{\frac{7}{2}})$

**338.** a) $f(1) = -2$
(Funktion $f$ määrittelyjoukko on $[0, \infty[$.
Derivoiminen ja derivaattafunktion käsittely on jonkin verran yksinkertaisempaa, jos tulon derivointikaavan soveltamisen sijasta suoritetaan ensin kertolasku:

$f(x) = x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}$, jolloin

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})$$
$$= \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}.$$

Derivaattafunktion nollakohta on $1$ ja derivaattafunktion merkki on sama kuin lausekkeen $x - 1$ merkki.)

b) $g(4) = 4$
(Funktion $g$ määrittelyjoukko on $]0, \infty[$.
Jos ensin jaetaan termeittäin, saadaan

$g(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$, jolloin

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} = \frac{x-4}{2x\sqrt{x}}.)$$

**339.** Epäyhtälö $\frac{x+4}{4} \geqslant \sqrt{x}$ on yhtäpitävä epäyhtälön $x - 4\sqrt{x} + 4 \geqslant 0$ kanssa. Funktion $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4$ derivaattafunktio on

$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$, josta nähdään, että funktio $f$ saa pienimmän arvon kohdassa $4$. Pienin arvo on $0$. Koska funktion $f$ pienin arvo on $0$, funktion $f$ kaikki arvot ovat epänegatiivisia.

Epäyhtälön $x - 4\sqrt{x} + 4 \geqslant 0$ voi perustella myös ilman derivaattaa huomaamalla, että $x - 4\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x} - 2)^2$.

**340.** a) aidosti kasvava välillä $[\frac{1}{\sqrt[3]{16}}, \infty[$,

aidosti vähenevä välillä $[0, \frac{1}{\sqrt[3]{16}}]$

$(f'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$.

Kun yhtälö $4x\sqrt{x} = 1$ korotetaan toiseen potenssiin, saadaan yhtälö $16x^3 = 1$.)

b) yksi (Yhtälön juuret ovat a-kohdan funktion $f$ nollakohtia. a-kohdan tuloksen perusteella funktiolla $f$ on korkeintaan yksi nollakohta välillä $[0, \frac{1}{\sqrt[3]{16}}]$ ja korkeintaan yksi nollakohta välillä $[\frac{1}{\sqrt[3]{16}}, \infty[$.

Koska $f(0) = -1$ ja koska funktio $f$ on aidosti vähenevä välillä $[0, \frac{1}{\sqrt[3]{16}}]$, funktiolla $f$ ei ole nollakohtaa välillä $[0, \frac{1}{\sqrt[3]{16}}]$. Koska

$f(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}) \approx -1{,}47 < 0$ ja $f(2) \approx 1{,}59 > 0$,

funktiolla $f$ on nollakohta välillä $[\frac{1}{\sqrt[3]{16}}, \infty[$.)

**341.** a) 4,0 cm
b) 20 cm
c) $s(t) = \sqrt{2t} = \sqrt{2}\sqrt{t}$
d) 0,25 cm/s (Derivaattafunktion $s'(t) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$ arvo $s'(8)$.)
e) 0,050 cm/s

**342.** a) $-\frac{3}{\sqrt{1-6x}}$

$(\sqrt{1-6x} = (1-6x)^{\frac{1}{2}})$

b) $\frac{1}{(1-6x)\sqrt{1-6x}}$

$(\frac{1}{3\sqrt{1-6x}} = \frac{1}{3}(1-6x)^{-\frac{1}{2}})$

**343.** Yhtälössä $y = \sqrt{10-x}$ tulee olla $x \leqslant 10$. Suoran ja käyrän leikkauspisteet ratkaistaan yhtälöstä $\sqrt{10-x} = 6x - 3$, jonka neliöönkorotusehto on $x \geqslant \frac{1}{2}$. Neliöön korottamalla saadaan yhtälö $36x^2 - 35x - 1 = 0$, jonka juuret ovat $x = 1$ ja $x = -\frac{1}{36}$. Juuri 1 toteuttaa neliöönkorotusehdon, joten leikkauspisteen $x$-koordinaatti on 1. Leikkauspisteeseen piirretyn käyrän $y = \sqrt{10-x}$ tangentin kulmakerroin on funktion $f(x) = \sqrt{10-x}$ derivaatta $f'(1)$. Sijoittamalla derivaattafunktioon $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{10-x}}$ saadaan $f'(1) = -\frac{1}{6}$.
Koska tangentin kulmakertoimen ja suoran $y = 6x - 1$ kulmakertoimen tulo on $-1$, suora on kohtisuorassa tangenttia vastaan.

**344.** $-1$ (Funktio $f$ on määritelty kaikkialla.

$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+15}} + 1 = \frac{4x + \sqrt{x^2+15}}{\sqrt{x^2+15}}$.

Yhtälön $\sqrt{x^2+15} = -4x$ neliöönkorotusehto on $x \leqslant 0$.)

**345.** $g(0) = 2$ (Funktion $g$ määrittelyjoukko on $[-1, \infty[$. Derivaattafunktion

$g'(x) = -\sqrt{1+x} + \frac{2-x}{2\sqrt{1+x}} = -\frac{3x}{2\sqrt{1+x}}$

nollakohta on $x = 0$. Suurin arvo perustellaan kulkukaavion avulla.)

**346.** suurin arvo 3, pienin arvo $\sqrt{3}$
(Funktion $g$ määrittelyjoukko on suljettu väli $[0, 3]$. Derivaattafunktiolla

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{6-2x}}$ on välillä $]0, 3[$ nollakohta $x = 1$.)

**347.** pitkin $x$-akselia pisteeseen $(2{,}6;\ 0)$ ja loppumatka suoraan metsän läpi
(Jos ensin ajetaan pitkin maantietä pisteeseen $(x, 0)$, missä $0 \leqslant x \leqslant 10$, ja sitten loppumatka suoraan metsän läpi ja jos ajonopeus tiellä on $v$, niin matkaan kuluva aika on

$\frac{10-x}{v} + \frac{4\sqrt{x^2+100}}{v}$. Vakio $v$ on positiivinen, joten määritetään suljetun välin $[0, 10]$ kohta, jossa funktion

$f(x) = 10 - x + 4\sqrt{x^2+100}$ arvo on pienin.

Derivaattafunktiolla $f'(x) = -1 + \frac{4x}{\sqrt{x^2+100}}$

on välillä $]0, 10[$ nollakohta $\sqrt{\frac{100}{15}}$.)

**348.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$
(Jos kartion pohjaympyrän säde on $r$ ja kartion korkeus on $h$, niin kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Muuttujien $r$ ja $h$ välillä on yhteys $r^2 + h^2 = 1$. Jos muuttujaksi valitaan $h$, niin tilavuus on $V(h) = \frac{1}{3}\pi(1 - h^2)h$, missä $h$ on välillä $[0, 1]$. Jos muuttujaksi valitaan $r$, niin tilavuus on $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{1-r^2}$, missä $r$ on välillä $[0, 1]$. Koska $\frac{1}{3}\pi > 0$ ja $r^2 \geqslant 0$, niin funktio $V(r)$ saa suurimman arvon samassa kohdassa kuin funktio $f(r) = r^4(1 - r^2)$.)

**349.** rimasta rakennettavat sivut 2,00 m,
kaksi muuta sivua 3,46 m
(Jos rimasta rakennettavan sivun pituus on $x$, niin taulun lävistäjän pituus on $6 - x$ ja taulun kahden muun sivun pituus
$\sqrt{(6-x)^2 - x^2} = \sqrt{36 - 12x}$.
Taulun pinta-ala on $A(x) = x\sqrt{36 - 12x}$, missä muuttuja $x$ on ääritapausten määräämällä suljetulla välillä $[0, 3]$.
Koska $x \geqslant 0$, niin funktion $A(x)$ sijasta voidaan tutkia funktiota $f(x) = x^2(36 - 12x)$.)

**350.** a) 7 b) 3 c) 1
d) $\frac{1}{2}$ e) 0 f) $-\frac{1}{2}$
g) $-1$ h) $-9$

**351.** a) $x = 81$ $(x = 3^4)$
b) $x = 3$ c) $x = 1$
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{343}$ $(x = 7^{-3})$

**352.** a) 7 b) $\frac{1}{3}$

**353.** a) 4 b) $-15$
c) 4 d) $-1$

**354.** a) 1 320 b) 0,438

**355.** a) $x = e^{\frac{1}{3}}$ b) $x = e^{-2}$

**356.** a) 2 $(\log_5 \frac{10^2}{4})$
b) 2 $(\log_3 (\sqrt{10} - 1)(\sqrt{10} + 1))$

**357.** 3
$(3 \log_2 x + \log_2 24 + \log_2 x - (\log_2 3 + \log_2 x^4)$
$= 3 \log_2 x + \log_2 24 + \log_2 x - \log_2 3 - 4 \log_2 x$
$= \log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \frac{24}{3}$)

**358.** a) $-1$
(Yhtälö on määritelty, kun $x > -5$. Yhtälö saadaan muotoon $\log_6 ((x + 5)(x + 10)) = \log_6 6^2$, josta edelleen $(x + 5)(x + 10) = 36$ eli $x^2 + 15x + 14 = 0$.)
b) $x = -4$
(Yhtälön määrittelyehto on $-5 < x < 1$. Yhtälö saadaan muotoon $\log_5 (1 - x)^2 = \log_5 (5 + x) + \log_5 25$ ja edelleen muotoon $\log_5 (1 - x)^2 = \log_5 25(5 + x)$. Ratkaistaan yhtälö $(1 - x)^2 = 25(5 + x)$, jonka juuret ovat $-4$ ja 31.)

**359.** $3^{4513}$ on suurempi. Molemmissa luvuissa on 2 154 numeroa.
($\lg 3^{4513} = 4513 \lg 3 \approx 2153{,}2$, joten $3^{4513} \approx 10^{2153{,}2}$.)

**360.** a) 3,1 ($x = \frac{\ln \frac{11}{2{,}1}}{\ln 1{,}7}$, voidaan käyttää myös 10-kantaista logaritmia lg.)
b) 35 ($3x = \frac{\lg 0{,}12}{\lg 0{,}98}$, voidaan käyttää myös luonnollista logaritmia ln.)

**361.** a) 1,209 (Yhtälön $5^x = 7$ ratkaisu on $x = \frac{\ln 7}{\ln 5}$. Voidaan käyttää myös 10-kantaista logaritmia lg.)
b) $-0{,}8271$ (Yhtälön $7^x = \frac{1}{5}$ ratkaisu on $x = \frac{\lg \frac{1}{5}}{\lg 7}$. Voidaan käyttää myös luonnollista logaritmia ln.)

**362.** kymmenellä kopioinnilla (Epäyhtälö $0{,}71^x \cdot 28 < 1{,}0$ toteutuu, kun $x > \frac{\ln \frac{1{,}0}{28}}{\ln 0{,}71}$.)

**363.** $2^{4983}$
(Epäyhtälö $2^x \geqslant 10^{1500}$ toteutuu, kun $x \geqslant \frac{\lg 10^{1500}}{\lg 2}$ eli $x \geqslant \frac{1500}{\lg 2}$.)

**364.** vähintään 210 henkeä
(Jos ryhmässä on $n$ suomalaista, niin todennäköisyys, että mukana on ainakin yksi ortodoksi, on $1 - 0{,}989^n$. Tulee olla $1 - 0{,}989^n > 0{,}9$ eli $0{,}989^n < 0{,}1$. Epäyhtälö toteutuu, kun $n > \dfrac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}989} \approx 208{,}17$.)

**365.** a) $\ln \dfrac{1}{3} = -\ln 3$

($f'(x) = 3e^x - 1$, $f'(x) = 0$, kun $e^x = \dfrac{1}{3}$)

b) ei nollakohtia

($g'(x) = 3e^x + 1$, $g'(x) = 0$, kun $e^x = -\dfrac{1}{3}$)

**366.** Koska derivaattafunktio $f'(x) = x^2e^x$ on kaikkialla epänegatiivinen ja nolla vain kohdassa $x = 0$, funktio $f$ on kaikkialla aidosti kasvava.

**367.** a) $\dfrac{e^3}{27}$ (Derivaattafunktio sievenee muotoon $f'(x) = \dfrac{(x-3)e^x}{x^4}$. Kulkukaavion perusteella pienin arvo välillä $]0, \infty[$ on $f(3)$.)

b) $-\dfrac{27}{e^3}$ (Derivaattafunktio on $g'(x) = (x^3 + 3x^2)e^x$. Kulkukaavion perusteella pienin arvo on $f(-3)$.)

**368.** Koska $e^x > 0$ kaikilla $x$, käyrien leikkauspisteiden $x$-koordinaatit saadaan yhtälöstä $x^2 - 6x + 7 = -2$. Yhtälöllä on yksi juuri $x = 3$. Osoitetaan, että käyrillä on yhteisessä pisteessä yhteinen tangentti. Funktiolle $f(x) = (x^2 - 6x + 7)e^x$ on $f'(x) = (x^2 - 4x + 1)e^x$ ja $f'(3) = -2e^3$. Funktiolle $g(x) = -2e^x$ on $g'(x) = -2e^x$ ja $g'(3) = -2e^3$. Siis tangenttien kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

**369.** a) $-3x^2e^{-x^3}$ b) $xe^{\frac{x^2}{2}}$

c) $-4e^{-4x}$ $\left(\dfrac{1}{e^{4x}} = e^{-4x}\right)$

d) $4e^{4x}$ $((e^x)^4 = e^{4x})$

**370.** $m(t) = 75 \cdot 0{,}83^t \approx 75 \cdot e^{-0{,}186t}$
a) 9,6 µg/s b) 2,2 µg/s

**371.** $f'(x) = e^{-x} + 1 > 0$ kaikilla $x$, sillä $e^{-x} > 0$ kaikilla $x$.

**372.** aidosti kasvava välillä $[-\ln 3, \infty[$
(Derivaattafunktion $f'(x) = -e^{-x} + 3$ nollakohta on $\ln \dfrac{1}{3} = -\ln 3$.)

**373.** kohdassa $\ln 3$, pienin arvo $-9$
(Derivaattafunktiolla $f'(x) = 2e^{2x} - 6e^x = 2e^x(e^x - 3)$ on nollakohta $x = \ln 3$.
Pienin arvo perustellaan kulkukaavion avulla.)

**374.** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, e^{\frac{1}{2}}\right)$ ja $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, e^{\frac{1}{2}}\right)$

(Käyrän pisteeseen $(a, e^{a^2})$ piirretyn tangentin yhtälö on $y - e^{a^2} = 2ae^{a^2}(x - a)$.
Tangentti kulkee origon kautta, jos $0 - e^{a^2} = 2ae^{a^2}(0 - a)$. Koska $e^{a^2} > 0$ kaikilla $a$, yhtälö toteutuu, kun $2a^2 = 1$.)

**375.** $\dfrac{1}{e}$

(Kun $x \geqslant 0$, niin $e^{-2|x|} = e^{-2x}$, ja kun $x < 0$, niin $e^{-2|x|} = e^{2x}$. Käyrä on symmetrinen $y$-akselin suhteen. Jos $x$-akselilla olevan sivun positiivisella $x$-akselilla olevan päätepisteen $x$-koordinaatti on $x$, niin suorakulmion $x$-akselilla olevan kannan pituus on $2x$ ja suorakulmion korkeus $e^{-2x}$. Suorakulmion pinta-ala on $A(x) = 2xe^{-2x}$, missä muuttuja $x$ on välillä $]0, \infty[$. Derivaattafunktiolla $A'(x)$ on nollakohta $x = \dfrac{1}{2}$. Suurin arvo perustellaan kulkukaavion avulla.)

**376.** a) $f(x) = 3\ln x - \ln 4$, $f'(x) = \frac{3}{x}$

($f(x) = 4\ln x - (\ln 4 + \ln x)$)

b) $g(x) = 2\ln x + \ln 3$, $g'(x) = \frac{2}{x}$

($g(x) = 3\ln x + (\ln 3 - \ln x)$)

c) $h(x) = \frac{5}{6}\ln x$, $h'(x) = \frac{5}{6x}$

($h(x) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{3}\ln x$)

**377.** a) $e^{-\frac{1}{4}}$ (Funktion $f$ määrittelyjoukko on $]0, \infty[$. $f'(x) = x^3(4\ln x + 1)$ ja $f'(x) = 0$, kun $\ln x = -\frac{1}{4}$.)

b) $e^{\frac{1}{4}}$ (Funktion $g$ määrittelyjoukko on $]0, \infty[$. $g'(x) = \frac{1 - 4\ln x}{x^5}$ ja $g'(x) = 0$, kun $\ln x = \frac{1}{4}$.)

**378.** suurin arvo 1, pienin arvo $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}$

(Välillä $]1, 2[$ on derivaattafunktion $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$ nollakohta $\sqrt{2}$.

Arvo derivaatan nollakohdassa on

$g(\sqrt{2}) = \ln\sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} \approx 0{,}85$.

Arvot välin päätepisteissä ovat $g(1) = 1$ ja $g(2) = \ln 2 + \frac{1}{4} \approx 0{,}94$.)

**379.** Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $x\ln x + 1 - x \geqslant 0$ kanssa. Tutkitaan funktiota $f(x) = x\ln x + 1 - x$. Derivaattafunktiolla $f'(x) = \ln x$ on nollakohta $x = 1$. Kulkukaaviosta nähdään, että arvo $f(1) = 0$ on funktion $f$ pienin arvo. Koska funktion $f$ pienin arvo on nolla, funktion $f$ kaikki arvot ovat epänegatiivisia.

**380.** $a = e$, sivuamispiste on (1, 1).
(Funktion $f(x) = \ln ax = \ln a + \ln x$ kuvaajalle muuttujan arvon $x$ kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(x) = \frac{1}{x}$. Tangentti on suoran $y = x$ suuntainen, kun $\frac{1}{x} = 1$ eli kun $x = 1$. Vastaava kuvaajan piste on $(1, \ln a)$. Tämä piste on suoralla $y = x$, kun $\ln a = 1$ eli kun $a = e$.)

**381.** a) $\frac{2x - 1}{x^2 - x}$ b) $-\frac{2e^{-2x}}{e^{-2x} + 3}$

**382.** a) 2 (Funktion $f$ määrittelyjoukko on väli $]0, 6[$. Yhtälö $2\ln x - \ln(6 - x) = 0$ voidaan saattaa muotoon $\ln\frac{x^2}{6 - x} = \ln 1$, josta saadaan yhtälö $\frac{x^2}{6 - x} = 1$, tai muotoon $\ln x^2 = \ln(6 - x)$, josta saadaan yhtälö $x^2 = 6 - x$.)
b) ei nollakohtia (Derivaattafunktion $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{6 - x}$ määrittelyjoukko on sama kuin funktion $f(x)$ määrittelyjoukko $]0, 6[$. Yhtälön $\frac{2}{x} + \frac{1}{6 - x} = 0$ juuri $x = 12$ ei kuulu määrittelyjoukkoon.)

**383.** a) pisteessä $(-2, 0)$ 63°:n kulmassa (Yhtälö $\ln(2x + 5) = 0$ toteutuu, kun $2x + 5 = 1$ eli kun $x = -2$. Pisteeseen $(-2, 0)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(-2) = 2$. Tangentin ja $x$-akselin välisen kulman suuruus saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = 2$ tai se voidaan määrittää tangentin suuntavektorin $\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $x$-akselin suuntavektorin $\vec{i}$ pistetulon avulla.)
b) pisteessä $(0, \ln 5)$ 68°:n kulmassa (Leikkauspisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(0) = \frac{2}{5}$. Ensin voidaan laskea tangentin ja $x$-akselin välisen kulman suuruus yhtälöstä $\tan\alpha = \frac{2}{5}$, jolloin kysytty kulma on $90° - \alpha$. Kulma voidaan myös laskea tangentin suuntavektorin $5\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $y$-akselin suuntavektorin $\vec{j}$ pistetulon avulla.)

**384.** a) Ei ole. (Funktio saa jokaisen arvonsa paitsi nollan kahdessa eri kohdassa.)

b) On, $f^{-1}(y) = \sqrt[6]{y}$, missä $y \geqslant 0$.

c) On, $f^{-1}(y) = \sqrt[5]{y}$.

d) On, $f^{-1}(y) = \lg y$, missä $y > 0$.

**385.** a) Derivaattafunktio $f'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ on kaikkialla positiivinen, joten funktio $f$ on kaikkialla aidosti kasvava. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $]0, \infty[$. (Käänteisfunktion määrittelyjoukko on funktion $f$ arvojoukko. Koska funktion $e^x + 1$ arvojoukko on $]1, \infty[$, funktion $f$ arvojoukko on $]0, \infty[$.)

b) $f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$, missä $x > 0$

(Yhtälöstä $\ln(e^x + 1) = y$ saadaan $e^x + 1 = e^y$ eli $e^x = e^y - 1$.)

**386.** Koska $g'(x) = 30x^2 + 1 > 0$ kaikilla $x$, niin funktio $g$ on kaikkialla aidosti kasvava. Siis funktiolla $g$ on käänteisfunktio. Koska funktion $g$ arvojoukko on $\mathbb{R}$, niin käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$. Koska $g(0) = 1$, niin $g^{-1}(1) = 0$, ja koska $g(1) = 12$, niin $g^{-1}(12) = 1$.

## Sarja A

**1.** aidosti kasvava välillä $]-\infty, 2]$ ja aidosti vähenevä välillä $[2, \infty[$

$(f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} = (1 - \frac{1}{2}x)e^{-\frac{x}{2}}$.

Koska $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ kaikilla $x$, niin derivaattafunktion nollakohdat ja merkin määrää tekijä $1 - \frac{1}{2}x$.)

**2.** $x = \dfrac{8}{9}$

(Yhtälö on määritelty, kun $0 < x < 8$.
Yhtälö voidaan saattaa muotoon
$\log_3 \sqrt{8 - x} = \log_3 x + \log_3 3$ ja edelleen
$\log_3 \sqrt{8 - x} = \log_3 3x$, jolloin saadaan yhtälö $\sqrt{8 - x} = 3x$. Toinen tapa on kertoa yhtälö ensin luvulla 2, jolloin saadaan yhtälö
$\log_3 (8 - x) = 2 \log_3 x + 2$ ja edelleen
$\log_3 (8 - x) = \log_3 x^2 + \log_3 9$ ja
$\log_3 (8 - x) = \log_3 9x^2$, josta $8 - x = 9x^2$.)

**3.** $0{,}99^{229106}$

(Epäyhtälö $0{,}99^x < 10^{-1000}$ toteutuu, kun $x > \dfrac{\lg 10^{-1000}}{\lg 0{,}99}$ eli kun $x > \dfrac{-1000}{\lg 0{,}99}$.)

**4.** Yhtälössä $y = \sqrt{4x + 18}$ tulee olla $x \geqslant -4\frac{1}{2}$.

Yhtälöstä $\sqrt{4x + 18} = -2x + 3$, jonka neliöönkorotusehto on $x \leqslant \frac{3}{2}$, saadaan leikkauspisteen $x$-koordinaatti $-\frac{1}{2}$. Funktiolle $f(x) = \sqrt{4x + 18}$ on $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x + 18}}$. Koska $f'(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ ja $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$, suora $y = -2x + 3$ on kohtisuorassa leikkauspisteeseen piirrettyä tangenttia vastaan.

**5.** Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $\sqrt{x} - \ln(x+1) > 0$ kanssa. Tutkitaan funktiota $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x+1)$, missä $x \geqslant 0$. Osoittautuu, että derivaattafunktio

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{2(x+1)\sqrt{x}}$ on nollakohtaa $x = 1$ lukuun ottamatta positiivinen koko välillä $]0, \infty[$. Siis funktio $f$ on aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$. Koska $f(0) = 0$, niin $f(x) > 0$, kun $x > 0$.

**6.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}a$

(Jos ympyrän säde on $r$, niin pisteen $P$ etäisyys jänteestä on $f(r) = 2r - \sqrt{r^2 - a^2}$, missä $r \geqslant a$.

Derivaattafunktiolla $f'(r) = 2 - \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}$ on nollakohta $\dfrac{2}{\sqrt{3}}a$. Kulkukaavion avulla perustellaan, että funktio $f(r)$ saa tässä kohdassa pienimmän arvon.)

## Sarja B

**1.** $-25$

(Funktion $f$ määrittelyjoukko on $[0, \infty[$. Derivaattafunktion $f'(x) = 1 - \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ nollakohta on 25. Osoitetaan kulkukaavion avulla, että arvo $f(25)$ on funktion $f$ pienin arvo.)

**2.** a) massa 9,0 g, kasvaa nopeudella 4,8 g/h
b) massa 620 g, kasvaa nopeudella 330 g/h
($m(t) = 3{,}1 \cdot 1{,}7^t$ ja $m'(t) = 3{,}1 \cdot 1{,}7^t \ln 1{,}7$)

**3.** $P(x) = x^2 - x + 2$

(Funktion $(ax^2 + bx + c)e^x$ derivaattafunktio on $(ax^2 + (2a + b)x + (b + c))e^x$. Funktio $(ax^2 + (2a + b)x + (b + c))e^x$ on sama funktio kuin $(x^2 + x + 1)e^x$, kun $a = 1$, $2a + b = 1$ ja $b + c = 1$. Yhtälöryhmästä saadaan $a = 1$, $b = -1$ ja $c = 2$.)

**4.** Jos kuvaajan piste on $(a, \sqrt{a})$, niin janan päätepisteiden $y$-koordinaatit ovat 0 ja $\sqrt{a}$.

Tangentin yhtälö on $y - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x - a)$.

Sijoittamalla $x = 0$ saadaan tangentin ja $y$-akselin leikkauspisteen $y$-koordinaatti

$y = \sqrt{a} - \dfrac{a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{a} - \dfrac{\sqrt{a}}{2} = \dfrac{\sqrt{a}}{2}$.

**5.** arvolla $a = e^2$

(Pisteeseen $(a, \ln a)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $\dfrac{1}{a}$, joten normaalin kulmakerroin on $-a$. Normaalin yhtälö on $y - \ln a = -a(x - a)$. Sijoittamalla $y = 0$ saadaan normaalin ja $x$-akselin leikkauspiste $(a + \dfrac{\ln a}{a}, 0)$.

Kolmion $x$-akselilla olevan sivun pituus on $\dfrac{\ln a}{a}$ ja suoralla $x = a$ olevan sivun pituus $\ln a$, joten kolmion pinta-ala on $A(a) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(\ln a)^2}{a}$.

Derivaattafunktion $A'(a) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\ln a - (\ln a)^2}{a^2}$ nollakohdat saadaan yhtälöstä $\ln a(2 - \ln a) = 0$. Suurin arvo perustellaan kulkukaavion avulla.)

**6.** a) 7,1 cm/s b) 1,5 cm/s

(Jos vesimäärän tilavuus on $V$, niin vesikerroksen korkeus saadaan yhtälöstä $\dfrac{1}{3}\pi h^3 = V$:

$h = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$. Hetkellä $t$ vesimäärän tilavuus on $10t$ (dm$^3$), joten

$h(t) = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 10t}{\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{30}{\pi}} \cdot \sqrt[3]{t}$ (dm) ja

$h'(t) = \sqrt[3]{\dfrac{30}{\pi}} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot t^{-\frac{2}{3}}$.

Lasketaan $h'(1)$ ja $h'(10)$.)

## Sarja C

**1.** Funktion $f(x) = e^x - x - 1$ kuvaajalle pisteeseen $(x, f(x))$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(x) = e^x - 1 = x + f(x)$. Siis kulmakerroin on $x$- ja $y$-koordinaattien summa.

**2.** a) Sirius $-1{,}5$ ja Venus $-4{,}4$
($-2{,}5 \lg 4{,}0$ ja $-2{,}5 \lg (14 \cdot 4{,}0)$)
b) Auringon kirkkaus $6{,}3 \cdot 10^{10}$ Vegan kirkkautta ja himmeimpien näkyvien taivaankappaleiden $0{,}0040$ Vegan kirkkautta
(Ratkaistaan $F$ yhtälöistä $-2{,}5 \lg F = -27$ ja $-2{,}5 \lg F = 6{,}0$, joista saadaan $F = 10^{\frac{27}{2{,}5}}$ ja $F = 10^{-\frac{6{,}0}{2{,}5}}$.)

**3.** $2 \log_2 (1 + \sqrt{3}) = \log_2 (1 + \sqrt{3})^2$
$= \log_2 (4 + 2\sqrt{3}) = \log_2 2(2 + \sqrt{3})$
$= \log_2 (2 + \sqrt{3}) + \log_2 2 = \log_2 (2 + \sqrt{3}) + 1$

**4.** a) $[-8, \infty[$, käänteisfunktion määrittelyjoukko $[-12, \infty[$
(Derivaattafunktiosta
$f'(x) = \sqrt{x + 12} + \dfrac{x}{2\sqrt{x + 12}} = \dfrac{3x + 24}{2\sqrt{x + 12}}$ nähdään, että funktio $f$ on aidosti vähenevä välillä $[-12, -8]$ ja aidosti kasvava välillä $[-8, \infty[$. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on välille $[-8, \infty[$ rajatun funktion $f$ arvojoukko.)
b) nollakohta 4, kohdassa $-5$
($f(0) = 4$ ja $f(-3) = -5$)
c) $-1{,}22$
(Määritetään haarukoimalla funktion $f$ nollakohdan likiarvo. Nähdään, että $f(-1{,}22) < 0$ ja $f(-1{,}215) > 0$.)

**5.** pistettä $(0, \frac{3}{2})$

(Kuvaajan pisteeseen $(a, e^{a^2})$ piirretyn normaalin kulmakerroin on tangentin kulmakertoimen $f'(a) = 2a e^{a^2}$ käänteisluvun vastaluku $-\dfrac{1}{2a e^{a^2}}$.

Normaalin yhtälö on $y - e^{a^2} = -\dfrac{1}{2a e^{a^2}}(x - a)$.

Sijoittamalla $x = 0$ nähdään, että normaali leikkaa $y$-akselin pisteessä, jonka $y$-koordinaatti on $y = e^{a^2} + \dfrac{1}{2e^{a^2}}$. Kun $a$ lähenee nollaa, niin funktion $e^{a^2}$ arvo lähenee lukua 1.)

**6.** $16\sqrt{2}$
(Muodostuva kolmio on tasakylkinen. Jos kantana oleva jänne on pisteiden $P$ ja $O$ välissä, niin kolmion pinta-ala on pienempi kuin halkaisija kantana piirretyn kolmion. Voidaan siis olettaa, että ympyrän keskipiste $O$ on joko kolmion kannalla tai kolmion sisällä kolmion korkeusjanalla. Jos $x$ on kolmion kannan etäisyys keskipisteestä, niin kolmion pinta-ala on $A(x) = (7 + x)\sqrt{9 - x^2}$, missä muuttuja $x$ on välillä $[0, 3]$.
Derivaattafunktiolla
$A'(x) = \sqrt{9 - x^2} + (7 + x)\left(-\dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\right)$
$= \dfrac{-2x^2 - 7x + 9}{\sqrt{9 - x^2}}$ on välillä $]0, 3[$ nollakohta 1.)

## Sarja D

**1.** $\frac{8}{9}$

(Funktio $f(x)$ on määritelty, kun $x \leqslant 1$.
Yhtälö $3x - 2\sqrt{1-x} = 2$ saatetaan muotoon $3x - 2 = 2\sqrt{1-x}$, jonka neliöönkorotusehto on $x \geqslant \frac{2}{3}$. Neliöön korotetun yhtälön juuret ovat 0 ja $\frac{8}{9}$, joista jälkimmäinen toteuttaa määrittely- ja neliöönkorotusehdot.)

**2.** suurin arvo $-\ln 2 - 1$, pienin arvo $-2$

(Välillä $]\frac{1}{e}, 1[$ on derivaattafunktion $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$ nollakohta $\frac{1}{2}$. Lasketaan arvo $f(\frac{1}{2}) = \ln \frac{1}{2} - 1 = -\ln 2 - 1 \approx -1{,}69$ sekä päätepistearvot $f(\frac{1}{e}) = -1 - \frac{2}{e} \approx -1{,}74$ ja $f(1) = -2$.)

**3.** Osoitetaan, että kaikilla $x$ on $e^x > 2x$ eli $e^x - 2x > 0$. Tutkitaan funktiota $f(x) = e^x - 2x$. Derivaattafunktiolla $f'(x) = e^x - 2$ on nollakohta $\ln 2$. Kulkukaaviosta nähdään, että $f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}61$ on funktion $f$ pienin arvo. Koska funktion $f$ pienin arvo on positiivinen, funktion $f$ kaikki arvot ovat positiivisia.

**4.** Tutkitaan erotusfunktiota $f(x) = e^{0{,}002x} + 10^{-3}x - 10^3$.
Koska $e^{0{,}002x} > 0$ kaikilla $x$, derivaattafunktio $f'(x) = 0{,}002e^{0{,}002x} + 10^{-3}$ on kaikkialla positiivinen.
Funktio $f(x) = e^{0{,}002x} + 10^{-3}x - 10^3$ on siis kaikkialla aidosti kasvava, joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta. Koska esimerkiksi $f(0) = -999 < 0$ ja $f(4000) \approx 1985 > 0$, funktiolla on yksi nollakohta. Edelleen haarukoimalla havaitaan, että $f(3450) \approx -4{,}3 < 0$ ja $f(3455) \approx 5{,}7 > 0$, joten juuren likiarvo kolmen numeron tarkkuudella on 3450.

**5.** Pisteeseen $(a, \frac{1}{\sqrt{a}})$ piirretyn tangentin yhtälö on

$$y - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}(x - a).$$

Tangentti leikkaa $x$-akselin pisteessä $(3a, 0)$ ja $y$-akselin pisteessä $(0, \frac{3}{2\sqrt{a}})$.
Kartion tilavuus on
$\frac{1}{3}\pi(\frac{3}{2\sqrt{a}})^2 \cdot 3a = \frac{9\pi}{4}$.
Kartion tilavuus on siis aina $\frac{9\pi}{4}$.

**6.** leveys pohjassa 1,42 m ja pinnassa 2,58 m, vinojen seinämien pituus pinnasta pohjaan 1,15 m
(Seinien ja pohjien yhteenlaskettu pinta-ala on pienin, kun puolisuunnikkaan kylkien pituuksien ja pohjasta mitatun leveyden summa on pienin. Jos puolisuunnikkaan leveys pohjalla on $a$ (m) ja pinnalla $a + 2b$ (m), niin kourun poikkipinta-ala on $a + b$ (m$^2$), josta saadaan $a + b = 2$.
Valitaan muuttujaksi $b$, jolloin puolisuunnikkaan kylkien pituus on $\sqrt{b^2 + 1}$. Tutkitaan, millä $b$:n arvolla funktion $f(b) = 2\sqrt{b^2 + 1} + 2 - b$ arvo on pienin, kun $b$ on välillä $[0, 2]$.
Saadaan $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.)

## Sarja E

**1.** $-\sqrt{2}$

(Derivaattafunktion

$g'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} - 1 = \dfrac{-x-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$ nollakohdat ratkaistaan yhtälöstä $\sqrt{4-x^2} = -x$, jonka neliöönkorotusehto on $x \leqslant 0$.)

**2.** aidosti kasvava koko määrittelyjoukossa $]0, \infty[$

(Derivaattafunktio

$f'(x) = 1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2}$

on positiivinen, kun $x > 0$.)

**3.** $a = -\dfrac{1}{8}$, sivuamispiste on $(\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{8})$

(Kuvaajalle muuttujan arvon $x$-kohdalle piirretty tangentti on suoran $y = 2x$ suuntainen, kun $f'(x) = 2$. Yhtälöstä $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2$ saadaan $x = \dfrac{1}{16}$.

Pisteen $(\dfrac{1}{16}, f(\dfrac{1}{16}))$ tulee olla suoralla $y = 2x$, mistä ehdosta saadaan yhtälö $\dfrac{1}{4} + a = \dfrac{1}{8}$.)

**4.** nollakohdat 1 ja $e^2$, maksimikohta $e^{-\sqrt{2}}$ ja minimikohta $e^{\sqrt{2}}$

(Funktion $f$ määrittelyjoukko on $]0, \infty[$. Funktio voidaan kirjoittaa muotoon $f(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x$. Funktion $f$ nollakohdat saadaan yhtälöstä $x \ln x\,(\ln x - 2) = 0$. Derivaattafunktio sievenee muotoon $f'(x) = (\ln x)^2 - 2$, joten $f'(x) = 0$, kun $\ln x = \sqrt{2}$ tai $\ln x = -\sqrt{2}$. Ääriarvokohdat perustellaan kulkukaavion avulla.)

**5.** (Jos $x_0$ on leikkauspisteen $x$-koordinaatti, niin $\dfrac{1}{\sqrt{x_0}} = \sqrt{2x_0^2 + c}$ eli $\sqrt{x_0}\sqrt{2x_0^2 + c} = 1$.

Muuttujan arvon $x_0$ kohdalle piirrettyjen käyrien tangenttien kulmakertoimet (derivaatat kohdassa $x_0$) ovat $-\dfrac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}$ ja $\dfrac{2x_0}{\sqrt{2x_0^2 + c}}$.

Kulmakertoimien tulo on

$$-\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}} \cdot \frac{2x_0}{\sqrt{2x_0^2 + c}} = -\frac{1}{\sqrt{x_0}\sqrt{2x_0^2 + c}} = -1,$$

joten käyrät leikkaavat kohtisuorasti.)

**6.** $\dfrac{2}{e}$

(Käyrän $y = e^x$ pisteeseen $(a, e^a)$ piirretyn tangentin yhtälö on $y - e^a = e^a(x - a)$. Tangentti leikkaa $x$-akselin pisteessä $(a - 1, 0)$. Leikkauspiste on negatiivisella $x$-akselilla, kun $a < 1$. Tangentti leikkaa $y$-akselin pisteessä $(0, (1 - a)\,e^a)$. Leikkauspiste on positiivisella $y$-akselilla, kun $a < 1$. Kolmion pinta-ala on $A(a) = \dfrac{1}{2}(1 - a)^2 e^a$, missä $a < 1$.

Derivaattafunktio on $A'(a) = \dfrac{1}{2}(a^2 - 1)e^a$.

Suurin arvo perustellaan kulkukaavion avulla.)

# Hakemisto


derivaatan määritelmä . . . . . 7

derivaattafunktio . . . . . 10

derivoituva funktio . . . . . 7

desibeli . . . . . 72

eksponenttifunktio $e^x$
- derivaatta . . . . . 92
- ominaisuuksia . . . . . 92
- funktion $e^{f(x)}$ derivaatta . . . . . 104

eksponenttifunktion derivaatta . . . . . 109

eksponenttiyhtälön ratkaiseminen . . . . . 82

erotusosamäärä . . . . . 7

funktion $u(x)\sqrt{v(x)}$ suurin ja pienin arvo 55

funktion $\sqrt{v(x)}$ suurin ja pienin arvo . . . 53

funktion $\sqrt[n]{f}$ derivaatta . . . . . 37

juurifunktio
- määritelmä . . . . . 14
- derivaatta . . . . . 27
- derivoituvuus . . . . . 30

kymmenkantainen logaritmi $\lg x$ . . . . . 68

käänteisfunktio
- määritelmä . . . . . 128
- kuvaaja . . . . . 133

logaritmi . . . . . 63

logaritmifunktio
- määritelmä . . . . . 65
- määrittelyjoukko . . . . . 65

logaritmikaavat
- potenssin logaritmikaava . . . . . 74
- tulon logaritmikaava . . . . . 75
- osamäärän logaritmikaava . . . . . 75

luonnollinen logaritmifunktio $\ln x$
- määritelmä . . . . . 95
- derivaatta . . . . . 116
- ominaisuuksia . . . . . 117
- funktion $\ln f(x)$ derivaatta . . . . . 120

murtopotenssifunktio
- määritelmä . . . . . 24
- määrittelyjoukko . . . . . 25
- derivaatta . . . . . 27

neliöönkorotusehto . . . . . 18

Neperin luku $e$ . . . . . 92

richterasteikko . . . . . 71

sisäfunktio . . . . . 99

Stirlingin kaava . . . . . 97

ulkofunktio . . . . . 99

yhdistetty funktio
- määritelmä . . . . . 99
- derivaatta . . . . . 102

ääriarvot . . . . . 12